Introduction à l'analyse réelle

Erwan Penchèvre

8 septembre 2013

1 Les objets de l'analyse

Les objets de l'analyse : les nombres réels, les fonctions, les suites. L'ensemble des *nombres réels* est noté $\mathbb{R}$. Il contient des nombres dont la définition n'est pas toujours évidente (par exemple π et e, ou encore « l'unique solution positive de l'équation $x^{12} = 2$ »). Pour mieux comprendre ce qu'est un nombre réel, on s'intéresse dans un premier temps à un ensemble plus étroit, l'ensemble des *nombres rationnels* noté $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

L'ensemble $\mathbb{R}$ vérifie toutes les propriétés de $\mathbb{Q}$, mais est plus vaste : certains nombres réels ne sont pas rationnels. L'ensemble $\mathbb{R}$ possède une propriété que $\mathbb{Q}$ n'a pas : c'est un ensemble « complet ». On verra ci-dessous comment définir de manière rigoureuse ce qu'est un nombre réel.

Une *fonction* est une loi qui, à tout nombre réel compris dans un certain domaine, fait correspondre un autre nombre réel (pas nécessairement compris dans ce domaine). Il s'agit donc d'une correspondance entre deux domaines, des sous-ensembles de l'ensemble $\mathbb{R}$ de tous les nombres réels. Si A et B désignent deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$, une fonction f associant un élément de B à chaque élément de A est parfois notée :

$$A \xrightarrow{f} B$$

Exemples : la fonction sinus

$$[0, 2\pi] \xrightarrow{\sin} [-1, 1]$$

Autres exemples :

$$\begin{array}{rccl} g : &]-\infty, 0[\ \cup\ ]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1/x \end{array}$$

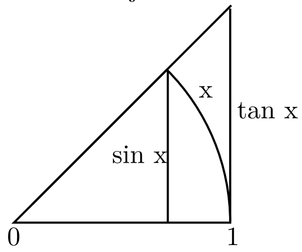
$$\begin{array}{rccl} h : &]-\infty, 0[\ \cup\ ]0, +\infty[& \longrightarrow &]-\infty, 0[\ \cup\ ]0, +\infty[\\ & x & \longmapsto & 1/x \end{array}$$

Autrement dit, à toute valeur de la quantité x variant dans un certain domaine, la fonction g associe une autre valeur, notée $g(x) = 1/x$ (c'est l'inverse du nombre réel x). Quand la quantité x est conçue comme *variable*, la quantité $g(x)$ varie aussi, *en fonction* de x. Une fonction est donc une loi de correspondance entre deux variables.

Enfin, en analyse, on rencontre aussi des *suites*. Une suite est un peu comme une fonction, mais la variable initiale ne prend que des valeurs entières : au lieu de la noter x, on la note souvent n. La suite fait correspondre à tout entier naturel n un nombre réel u_n. Pour désigner cette loi de correspondance, on la note parfois :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

FIGURE 1 – Minoration et majoration du sinus d'un angle petit



ou bien

$$(u_n)_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\geq 0}}$$

Par exemple, si $u_n = 1/n$, la suite (u_n) associe à tout nombre entier positif n son inverse $1/n$.

2 Quelques exemples de fonctions et de suites

Comment définit-on une fonction ?

- Par une formule faisant intervenir d'autres fonctions déjà connues. Par exemple je peux définir une fonction f sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ en écrivant :

$$f(x) = 2x + 5 + \tan(x)$$

- Au moyen d'une intégrale. Par exemple, la fonction $\ln x$ peut être définie ainsi :

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

- Au moyen d'une équation à deux inconnues. En particulier, c'est ainsi que l'on peut définir les « fonctions réciproques ». Soit une fonction déjà connue, par exemple la fonction tangente $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to]-\infty, \infty[$. Considérons l'équation suivante :

$$x = \tan y$$

  On peut concevoir la solution y de cette équation comme étant une fonction de la variable x. Appelons cette fonction $\arctan$. C'est la « fonction réciproque » de $\tan$. C'est-à-dire que $\arctan x$ est la valeur de l'angle dont la tangente est égale à x.
- Au moyen d'une équation différentielle. La fonction $\ln x$ peut aussi être définie comme étant une des solutions de l'équation différentielle

$$xy' = 1$$

- Par la géométrie.
- Au moyen d'une série.

Pour mieux comprendre ces deux derniers procédés, on va s'intéresser aux fonctions trigonométriques élémentaires, par exemple la fonction sinus $\sin$. On peut définir cette fonction et en démontrer les propriétés les plus utiles en faisant appel, comme au lycée, à quelques connaissances de géométrie euclidienne (théorème de Pythagore) auxquelles on adjoint quelques propriétés sur la mesure du cercle (un cercle de rayon 1 a pour périmètre 2π et pour surface π, on interprète la longueur d'un arc comme étant la mesure de l'angle au centre). Dans un repère orthonormé xOy, la quantité $\sin\alpha$ se lit alors, dans le cercle de rayon 1 centré en l'origine, comme étant l'ordonnée du point A situé sur la circonférence du cercle tel que $\widehat{xOA} = \alpha$.

On va maintenant démontrer « par la géométrie » (cf. figure) que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad \frac{x}{2} < \sin x < x$$

L'inégalité de droite est évidente : la longueur de l'arc de cercle est supérieure à la longueur de la corde (car la ligne droite est le plus court chemin entre deux points), et la corde est elle-même supérieure au sinus. Pour démontrer l'inégalité de gauche, il faut raisonner sur l'aire du grand triangle délimité par l'axe des abscisses et par la tangente de l'arc. Cette aire est égale à $(\tan x)/2$, et elle est supérieure à l'aire du secteur angulaire qui est égale à $x/2$ (car l'aire du disque entier est égale à $2\pi/2$). On a donc :

$$\frac{\tan x}{2} > \frac{x}{2}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sin x}{\cos x} > x$$

Or pour $x \in [0, \pi/4]$, $\cos x > 1/2$ donc $\sin x > x/2$.

Maintenant, au terme de cette introduction à l'analyse (cf. section 15 p. 27), vous allez entrevoir que l'on peut exprimer de nombreuses fonctions réelles comme des sortes de « sommes infinies » de puissances de x affectées de coefficients constants. Par exemple, l'écriture suivante a un sens :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Plus encore, on peut ainsi définir *a priori* la fonction sinus, sans référence aucune à la géométrie. Et pour de petites valeurs de x, les puissances de x de degrés élévées sont très petites ; alors les premiers termes de cette somme infinie donnent une bonne approximation de $\sin x$. Si l'on sait de plus majorer l'erreur ainsi commise en négligeant les derniers termes d'une telle somme infinie, on peut même déduire d'une telle écriture des inégalités comme celles que l'on vient de démontrer par la géométrie pour la fonction sinus. C'est ce que la « formule de Taylor » (cf. p. 27) nous permettra de faire.

Quant aux suites, il y a aussi plusieurs manières de les définir :

– Par une formule (faisant éventuellement intervenir d'autres suites déjà connues, ou bien des fonctions). Par exemple :

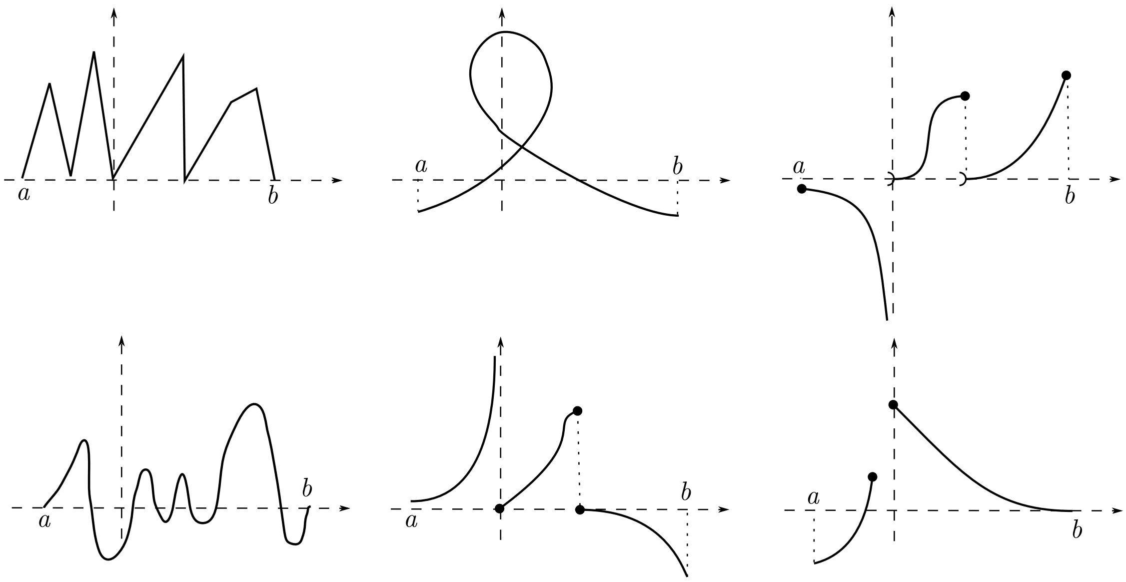
$$u_n = \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \frac{1}{n}$$

– « Récursivement ». Par exemple la « suite de Fibonacci » en rapport avec le nombre d'or est définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_1 = 1 \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

3 Exercices sur les fonctions

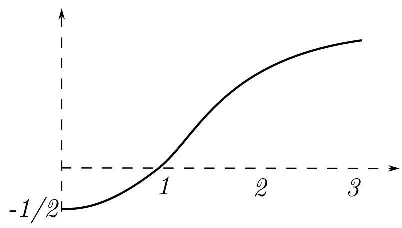
Exercice 3.1 *Dire si les courbes ci-dessous sont des graphes de fonctions définies sur l'intervalle* $]a, b[$ *de* $\mathbb{R}$.



Exercice 3.2 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ dont le graphe figure ci-dessous. Dessiner les graphes des fonctions suivantes (donner leurs domaines de définition) :*

$$f_1 : x \mapsto f(-x), \qquad f_2 : x \mapsto (f(x))^2, \qquad f_3 : x \mapsto 1 - f(x),$$

$$f_4 : x \mapsto \sqrt{f(x)}, \qquad f_5 : x \mapsto f(x-1), \qquad f_6 : x \mapsto f(1-x)$$



Exercice 3.3 *a) Tracer dans un repère orthonormé les graphes des fonctions $x \mapsto f_1(x) = |x+1|$ et $x \mapsto f_2(x) = |x+3|$. En déduire l'ensemble $E_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| \leq |x+3|\}$, que l'on représentera.*

b) Etudier la fonction $f_3 : x \mapsto -x^2+x+1$. Déterminer et représenter les ensembles $E_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq -1\right\}$ et $E_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \geq \frac{1}{2}\right\}$.

Exercice 3.4 *a) Montrer que le graphe de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ se déduit de celui de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ par une translation. Représenter les deux graphes dans un repère orthonormé. Quels sont les axes de symétrie de ces graphes ?*

b) Montrer que le graphe de la fonction $h : x \mapsto \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 12x + 11$ possède un centre de symétrie (on pourra considérer la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$).

Exercice 3.5 *On considère la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x) = \cos 3x + \left(\frac{\sqrt{3}\sin x + \cos x}{\sin x - \sqrt{3}\cos x}\right)^3$$

a) Quel est son domaine de définition ?

b) Etudier la périodicité de f.

c) Montrer que, dans un repère orthonormé, la courbe représentative de f admet le point $P(-\frac{\pi}{6},0)$ comme centre de symétrie.

Exercice 3.6 *Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{E}(x)$ est la partie entière de x. Considérons la fonction*

$$h : x \in \mathbb{R} \longmapsto x - \mathrm{E}(x)$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 \leq h(x) < 1$. Montrer que h est périodique de période 1. Tracer le graphe de h.

Exercice 3.7 *a) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer les ensembles suivants : $f([-3,-1])$, $f([-2,1])$, $f([-3,-1]) \cup f([-2,1])$, $f([-3,-1]) \cap f([-2,1])$. Les comparer.*

b) Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Si A et B sont deux parties de E, C et D deux parties de F, montrer que :

(i) $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$

(ii) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Dans ce dernier cas, donner un exemple où l'inclusion est stricte et un exemple où il y a égalité.

Exercice 3.8 *Soit f une fonction non constante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique ayant deux périodes T et S, c'est-à-dire que :*

$$(\forall x) \quad f(x+T) = f(x+S) = f(x)$$

Est-il possible que T et S n'aient pas de sous-multiple commun ? Autrement dit, est-il possible que $\dfrac{T}{S} \not\in \mathbb{Q}$?

4 $\mathbb{Q}$, ensemble de nombres et corps archimédien

Les nombres rationnels constituent un ensemble

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q > 0 \right\}$$

Mais cet ensemble n'est pas une simple multiplicité abstraite ; on peut additionner, multiplier, comparer les nombres entre eux. C'est à tout cela que l'on fait allusion quand on dit que $\mathbb{Q}$ est un « corps ».

L'*addition* est une opération associative ($a+(b+c) = (a+b)+c$) et commutative ($a+b = b+a$). Elle possède un « élément neutre » appelé *zéro*. Tout nombre possède un inverse pour l'addition, appelé son *opposé*.

La *multiplication* est une opération associative, commutative et distributive sur l'addition ($a \times (b+c) = a \times b + a \times c$). Elle possède un élément neutre appelé l'*unité* 1. Tout nombre non nul x possède un inverse pour la multiplication $1/x$. De plus pour tout x, on a $0 \times x = 0$.

Propriété 4.1 (intégrité) *Soit deux rationnels a et $x \in \mathbb{Q}$. Supposons que $a \times x = 0$ mais que $x \neq 0$. Alors $a = 0$.*

Comme l'ensemble des nombres rationnels vérifie cette propriété, on dit que $\mathbb{Q}$ est « intègre ».

La relation « strictement inférieur à », notée $<$, définit un ordre sur $\mathbb{Q}$. Cet ordre est compatible avec l'addition ($a < b \Rightarrow a + c < b + c$). Le fait que $1 > 0$ permet de définir une coupure entre deux classes de nombres rationnels : les nombres positifs $\mathbb{Q}_+$ et les nombres négatifs $\mathbb{Q}_-$. La notation $\mathbb{Q}^\star$ désigne, quant à elle, l'ensemble des nombres non nuls (tous sauf zéro). L'ordre est aussi compatible avec la multiplication, au sens où, si $c > 0$, alors $a < b \Rightarrow ac < bc$. Par contre, on peut montrer que la multiplication par -1 renverse l'ordre : $a < b \Rightarrow -b < -a$.

Propriété 4.2 (Archimède) *Soit $a, b \in \mathbb{Q}$. Supposons que $0 < a < b$. Alors il existe un entier positif n tel que $na > b$.*

Un corps de nombres vérifiant cette propriété est dit « archimédien ». $\mathbb{Q}$ est donc un corps archimédien.

Propriété 4.3 (Inégalités triangulaires) *Pour tout nombre rationnel a, on note $|a| = \max(-a, a)$ le nombre que l'on appelle « valeur absolue de a ». On a alors :*

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

Démonstration. Suivant le signe de a et de b, on a quatre cas possibles. Supposons par exemple que $a < 0$ et $b > 0$. Alors $|a| = -a$ et $|b| = b$. Alors $|a + b| = | - |a| + |b||$. Alors, soit $-|a| + |b| > 0$, auquel cas

$$|a + b| = -|a| + |b| < |a| + |b|$$

Soit $-|a| + |b| < 0$, auquel cas :

$$|a + b| = |a| - |b| < |a| + |b|$$

L'inégalité de droite est donc bien démontrée dans le cas $a < 0$ et $b > 0$. On fait de même dans chacun des trois autres cas possibles.

Pour démontrer à présent l'inégalité de gauche, on applique l'inégalité de droite à $|(a + b) - b|$. On obtient :

$$|(a + b) - b| \leq |a + b| + |b|$$

Alors :

$$|a| - |b| \leq |a + b|$$

Mais le même raisonnement, en échangeant les rôles de a et b, conduit à :

$$|b| - |a| \leq |a + b|$$

Donc :

$$\max(|b| - |a|, |a| - |b|) \leq |a + b|$$

C'est-à-dire

$$||a| - |b|| \leq |a + b|$$

Les inégalités triangulaires sont ainsi démontrées.

On verra que le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ vérifie aussi toutes les propriétés que l'on vient d'énoncer.

5 Limite d'une suite

Rappels. On dit qu'une suite (u_n) a pour limite le nombre réel (resp. rationnel) ℓ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \mid \ n > N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On écrit alors

$$\lim(u_n) = \ell$$

S'il existe un tel nombre réel (resp. rationnel), on dit que la suite (u_n) est *convergente* dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{Q}$). Sinon, on dit qu'elle est divergente. Il y a deux types de divergence. Il arrive que la suite (u_n) ait une limite infinie : par exemple $\lim(u_n) = +\infty$ lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N} \ \mid \ n > N \Rightarrow u_n > M$$

Il arrive aussi que (u_n) n'ait aucune limite (ni finie, ni infinie).

Propriété 5.1 *Soit* (u_n) *et* (v_n) *deux suites convergentes avec*

$$\lim(u_n) = a$$

$$\lim(v_n) = b$$

Alors $\lim(u_n + v_n) = a + b$ *et* $\lim(u_n \times v_n) = ab$.

On ne rappellera pas ici toutes les propositions analogues concernant deux suites dont l'une a pour limite $\pm\infty$.

Démonstration. On démontrera seulement que $\lim(u_n \times v_n) = ab$.

$$\begin{aligned}
|u_n v_n - ab| &= |(u_n - a)v_n + av_n - ab| \\
&= |(u_n - a)v_n + a(v_n - b)| \\
&= |(u_n - a)(v_n - b) + (u_n - a)b + a(v_n - b)| \\
&\leq |u_n - a|.|v_n - b| + |u_n - a|.|b| + |a|.|v_n - b|
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit N tel que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

$$n > N \Rightarrow |u_n - a| < \min\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}, \frac{\varepsilon}{3|b|}\right)$$

$$n > N \Rightarrow |v_n - b| < \min\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}, \frac{\varepsilon}{3|a|}\right)$$

Alors on a :

$$\begin{aligned}
|u_n v_n - ab| &\leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}.\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} + \frac{\varepsilon}{3|b|}.|b| + |a|.\frac{\varepsilon}{3|a|} \\
&\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

L'énoncé ci-dessus est ainsi démontré.

6 Qu'est-ce qu'un nombre réel ?

Pour répondre à cette question, on va construire un ensemble, de manière abstraite. Chaque élément de cet ensemble est en fait lui-même un ensemble dont les éléments sont (!) des *suites*. Mais après coup, on pensera chacun de ces ensembles de suites comme étant une sorte de nombre. On vérifiera qu'on peut les additionner, les multiplier, etc. comme des nombres. Ce seront eux les *nombres réels*. Et seulement à la fin de ce raisonnement, nous serons capables d'identifier certains de ces « nombres » aux nombres rationnels que l'on connaît.

Comme l'on ne sait pas encore ce qu'est un nombre réel, on s'intéresse d'abord à des suites de nombres rationnels. L'ensemble de toutes les suites de nombres rationnels est noté

$$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$$

On va construire un ensemble abstrait noté $\mathbb{R}$ qui sera une *partition* d'un ensemble $\mathscr{C}$ sous-ensemble de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. Rappelons qu'en théorie des ensembles, une partition d'un ensemble A est un ensemble de sous-ensembles disjoints de A, dont la réunion est égale à l'ensemble A tout entier.

On définit $\mathscr{C} \subset \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ comme étant l'ensemble des *suites de Cauchy*.

Définition 6.1 (suite de Cauchy) *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* de Cauchy *lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \mid p, q > N \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$$

Définition 6.2 (suites de Cauchy équivalentes) *Soit deux suites de Cauchy* (u_n) *et* (v_n)*. Les deux suites sont dites* équivalentes *lorsque* $\lim(u_n - v_n) = 0$*. On note alors*

$$(u_n) \sim (v_n)$$

En théorie des ensembles, on dit qu'un telle relation, symétrique, réflexive et transitive, est une *relation d'équivalence*. On peut alors définir des *classes d'équivalence*. Soit (u_n) une suite de Cauchy. La *classe d'équivalence* de (u_n) est l'ensemble x suivant :

$$x = \{(v_n \in \mathscr{C} \mid (v_n) \sim (u_n)\}$$

Les classes d'équivalences sont des sous-ensembles de $\mathscr{C}$ qui sont tous deux-à-deux disjoints ou confondus. C'est-à-dire que, si (u_n) et (v_n) sont deux suites de Cauchy, la classe d'équivalence de (u_n) et disjointe ou bien égale à la classe d'équivalence de (v_n). La réunion de toutes les classes d'équivalence est l'ensemble $\mathscr{C}$. On dit que l'ensemble des classes d'équivalence, notons-le $\mathbb{R}$, est une *partition* de $\mathscr{C}$ (il ne faut pas confondre la *réunion* des classes d'équivalence – c'est $\mathscr{C}$ – et l'*ensemble* des classes d'équivalence – c'est un ensemble d'ensembles, que l'on note $\mathbb{R}$).

Vous l'avez déjà deviné, cet ensemble $\mathbb{R}$ *est* l'ensemble des nombres réels. C'est-à-dire que l'on peut concevoir les classes d'équivalence comme des sortes de nombres. Pour le montrer, il faut qu'on explique ce que signifie ajouter ou multiplier deux classes d'équivalence entre elles.

Soit x et y deux classes d'équivalence :

$$x = \{(w_n) \in \mathscr{C} \mid (w_n) \sim (u_n)\}$$

$$y = \{(w_n) \in \mathscr{C} \mid (w_n) \sim (v_n)\}$$

On définit la somme ainsi :

$$x + y = \{(w_n) \in \mathscr{C} \mid (w_n) \sim (u_n + v_n)\}$$

Pour montrer que cette définition a un sens, il faut vérifier que $x + y$ ne dépend pas du choix de (u_n) et (v_n). En effet x est aussi la classe d'équivalence de n'importe quelle autre suite (u'_n)

équivalente à (u_n). De même s'il y a une suite $(v'_n) \sim (v_n)$. Soit $(w_n) \in \mathscr{C}$ tel que $(w_n) \sim (u'_n + v'_n)$. Or

$$w_n - u_n - v_n = (w_n - u'_n - v'_n) + (u'_n - u_n) + (v'_n - v_n)$$

Donc $\lim(w_n - u'_n - v'_n) = 0 \Rightarrow \lim(w_n - u_n - v_n) = 0$. Donc la classe d'équivalence de $(u'_n + v'_n)$ est égale à la classe d'équivalence de $(u_n + v_n)$.

On procède de même pour la multiplication de deux classes d'équivalence, ainsi que pour l'existence d'un inverse pour cette multiplication (utiliser le lemme suivant).

Lemme 6.1 *Soit (u_n) une suite de Cauchy. Alors :*

(i) (u_n) est bornée

(ii) si (u_n) ne tend pas vers 0, alors il existe un $\epsilon > 0$ et un entier N tel que $n > N \Rightarrow |u_n| > \epsilon$

On définit aussi une relation d'ordre $<$ sur $\mathbb{R}$ en posant que $x < y$ si et seulement si

$$(\exists N \in \mathbb{N})\ n > N \Rightarrow u_n < v_n$$

On vérifie que cette condition est indépendante du choix des suites (u_n) et (v_n) au sein des classes d'équivalence x et y.

7 Sur $\mathbb{R}$, convergence des suites de Cauchy

Théorème 7.1 *Soit (u_n) une suite de Cauchy. Alors cette suite converge : elle a une limite dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite de Cauchy de nombres réels. C'est donc une suite de classes d'équivalence de suites de Cauchy de nombres rationnels. C'est-à-dire que pour chaque i, il existe une suite de Cauchy de nombres rationnels, notons-la $(w_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$, suite dont la classe d'équivalence est u_i :

$$u_i = \{(v_n) \in \mathscr{C} \mid (v_n) \sim (w_n^{(i)})\}$$

On va définir une suite de nombres rationnels (d_n). Pour chaque n, on choisit un k_n assez grand pour que

$$p, q \geq k_n \Rightarrow |w_p^{(n)} - w_q^{(n)}| < \frac{1}{n}$$

On pose alors $d_n = w_{k_n}^{(n)}$. Montrons que la suite (d_n) est de Cauchy.

Soit $\epsilon > 0$. Comme (u_n) est de Cauchy, il existe donc un entier N tel que

$$p, q > N \Rightarrow |u_p - u_q| < \frac{\epsilon}{3}$$

Mais par définition de la relation d'ordre $<$ sur $\mathbb{R}$, cela signifie que, pour tous $p, q > N$, il existe $N'(p, q) \in \mathbb{N}$ dépendant de p et q tel que

$$i > N' \Rightarrow |w_i^{(p)} - w_i^{(q)}| < \frac{\epsilon}{3}$$

Et quitte à choisir un N encore plus grand, on peut supposer qu'il est supérieur à $\frac{3}{\epsilon}$. On a alors, pour tous $p, q > N$,

$$\frac{1}{p} \text{ et } \frac{1}{q} < \frac{\epsilon}{3}$$

Mais alors si $i > \max(N'(p,q), k_p, k_q)$, on aura les trois inégalités suivantes :

$$|w_i^{(p)} - w_i^{(q)}| < \frac{\epsilon}{3}$$

$$|w_i^{(p)} - w_{k_p}^{(p)}| < \frac{1}{p} < \frac{\epsilon}{3}$$

$$|w_i^{(q)} - w_{k_q}^{(q)}| < \frac{1}{q} < \frac{\epsilon}{3}$$

On en conclut que

$$|w_{k_p}^{(p)} - w_{k_q}^{(q)}| < \epsilon$$

C'est-à-dire

$$|d_p - d_q| < \epsilon$$

Donc (d_n) est bien une suite de Cauchy (de nombres rationnels). On peut donc considérer sa classe d'équivalence $\ell \in \mathbb{R}$. Montrons à présent que ℓ est limite de la suite u_n.

Il faut montrer que

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ n > N \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon$$

Soit donc un tel ϵ. La suite (d_n) est de Cauchy, il existe donc un entier N tel que

$$i > n > N \Rightarrow |d_i - d_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

D'autre part, par définition de k_n, quitte à prendre N encore plus grand et supérieur à $2/\epsilon$,

$$i > k_n \Rightarrow |w_i^{(n)} - w_{k_n}^{(n)}| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{2}$$

Alors pour tout $n > N$ et tout $i > k_n$, on a

$$|w_i^{(n)} - d_i| = |w_i^{(n)} - w_{k_n}^{(n)} + w_{k_n}^{(n)} - w_{k_i}^{(i)}| \leq |w_i^{(n)} - w_{k_n}^{(n)}| + |w_{k_n}^{(n)} - w_{k_i}^{(i)}| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

On a ainsi démontré que $(\forall n > N)\ |u_n - \ell| < \epsilon$. La limite de (u_n) est bien le nombre réel ℓ.

Théorème 7.2 (suites adjacentes) *Soit (a_n) et (b_n) deux suites. Supposons que (a_n) est croissante, (b_n) décroissante et que $\lim(b_n - a_n) = 0$. On dit que ces deux suites sont* adjacentes. *Elles sont alors toutes deux convergentes dans $\mathbb{R}$ et ont une limite commune.*

Démonstration. Soit trois entiers naturels quelconques $n < p < q$, alors

$$a_n \leq a_p \leq a_q < b_q \leq b_p \leq b_n$$

$$|a_q - a_p| \leq |b_n - a_n| = \frac{b-a}{2^n}$$

Donc la suite (a_n) est de Cauchy. De même pour la suite (b_n). Elles sont donc toutes deux convergentes dans $\mathbb{R}$, et comme $\lim(b_n - a_n) = 0$, elles ont une même limite. Le théorème est ainsi démontré.

Théorème 7.3 *Soit (u_n) une suite bornée. Alors il existe une suite extraite (u_{k_n}) convergente dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. (u_n) est bornée, donc il existe un intervalle $[a,b]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [a,b]$. On va définir par récurrence deux suites (a_i) et (b_i) vérifiant la propriété suivante :

$$(\forall N \in \mathbb{N})\ (\exists n > N)\ u_n \in [a_i, b_i]$$

(autrement dit, il existe une infinité de termes de (u_n) dans l'intervalle $[a_i, b_i]$). On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Supposons la suite construite et vérifiant cette propriété jusqu'au rang i. Deux cas possibles peuvent se présenter. Ou bien :

$$(\forall N \in \mathbb{N})\ (\exists n > N)\ u_n \in \left[a_i, \frac{a_i + b_i}{2}\right]$$

Dans ce cas, on pose $a_{i+1} = a_i$ et $b_{i+1} = \dfrac{a_i + b_i}{2}$. Ou bien, au contraire :

$$(\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n > N)\ u_n \not\in \left[a_i, \frac{a_i + b_i}{2}\right]$$

Mais dans ce cas, à cause de l'hypothèse de récurrence, pour un tel N et pour tout $N' \in \mathbb{N}$, il existe quand même un $n > \max(N', N)$ tel que $u_n \in [a_i, b_i]$. Comme on a d'autre part $u_n \not\in \left[a_i, \dfrac{a_i + b_i}{2}\right]$, il faut donc que $u_n \in \left[\dfrac{a_i + b_i}{2}, b_i\right]$. Posons donc $a_{i+1} = \dfrac{a_i + b_i}{2}$ et $b_{i+1} = b_i$. On a bien :

$$(\forall N' \in \mathbb{N})\ (\exists n > N')\ u_n \in [a_{i+1}, b_{i+1}]$$

Une fois nos deux suites (a_n) et (b_n) ainsi construites, on vérifie aisément qu'elles sont adjacentes (voir théorème précédent) donc convergentes vers une limite commune $\ell \in \mathbb{R}$. Choisissons $u_{k_1} \in [a_1, b_1]$. On construit une suite d'indices k_n croissante, par récurrence : supposons la suite construite jusqu'au rang i, avec $u_{k_i} \in [a_i, b_i]$, on choisit alors $k_{i+1} > k_i$ avec

$$u_{k_{i+1}} \in [a_{i+1}, b_{i+1}]$$

La suite (k_n) ainsi construite, on a pour tout n

$$a_n \le u_{k_n} \le b_n$$

Donc la suite (u_{k_n}) tend aussi vers ℓ.

8 Exercices : inégalité triangulaire, intervalles et voisinages

Exercice 8.1 *Montrer que pour tout x réel on a les deux inégalités suivantes :*

$$1 \le \left|4 + 3\cos\left(\frac{xe^x}{x^2+1}\right)\right| \le 7$$

$$\left|\frac{\cos x - 3}{5 - \sin x}\right| \le 1$$

Exercice 8.2 *Soient $a \in \mathbb{R}^\star$ et $I_a = \left\{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \frac{|a|}{2}\right\}$.*

a) Décrire l'ensemble I_a (défini en termes de valeur absolue) en termes d'encadrements et d'intervalles. Hachurer sur la droite réelle l'ensemble I_a pour différentes valeurs de a. Vérifier que si $x \in I_a$, alors $x \neq 0$ et x a le même signe que a.

b) Dire si chacune des deux propositions suivantes est vraie ou non (justifier vos réponses) :

$$(\exists m \in \mathbb{R}_+^\star)(\forall x \in I_a)(|x| > m)$$

$$(\exists M \in \mathbb{R}_+^\star)(\forall x \in I_a)\left(\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < M\right)$$

Exercice 8.3 *Montrer les inégalités suivantes, dans les voisinages de x indiqués :*

$$\left|\frac{x^3 - 3x + 6}{x^2 - 16}\right| < 6 \text{ si } |x - 2| < 1$$

$$\left|\frac{(x^3+1)\sin\left(\frac{1}{x}\right) + (x+1)(\cos^3(1+e^x)}{4x + \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right| < \frac{19}{4}|x+1| \text{ si } |x+1| < \frac{1}{2}$$

Exercice 8.4 *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n =]a_n, b_n[\subseteq \mathbb{R}$ (où $a_n < b_n$). On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subseteq I_n$, et on note $I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?*

(a) I est non vide

(b) I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$

9 Exercices sur les suites, suites adjacentes, suites extraites

Exercice 9.1 *Soient x un nombre réel, z un nombre complexe et a un entier strictement positif. Etudier la convergence des suites de terme général :*

$$a_n = x^n \qquad b_n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n \qquad c_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad d_n = \frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$e_n = \frac{n}{n+1}\sin\frac{n\pi}{2} \qquad f_n = \frac{n^{10}}{n!} \qquad g_n = \frac{n!}{n^n} \qquad h_n = \frac{n^{an}}{(an)!}$$

$$j_n = \frac{n^a}{x^n} \qquad k_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad m_n = \frac{1 + 2(-1)^n}{n + (-1)^n} \qquad p_n = n(\sqrt[n]{2} - 1)$$

Exercice 9.2 *Pour n entier supérieur à 2 et a et b des réels, on pose :*

$$u_n = \ln n + a\ln(n + (-1)^n) + b\ln(n + 2(-1)^n)$$

Pour quelles valeurs de a et b la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ converge-t-elle vers 0 ? Dans ce cas, pour quelles valeurs de a et b le terme général u_n garde-t-il un signe constant à partir d'un certain rang ?

Exercice 9.3 *a) Si deux suites extraites d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont même limite, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?*

b) On suppose que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

c) Les suites $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 9.4 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :*

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

a) *Montrer que ces suites sont adjacentes.*

b) *Donner un encadrement de leur limite. En déduire que cette limite est un nombre irrationnel.*

Exercice 9.5 *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *les suites définies par :*

$$a_1 = 1 \qquad b_1 = 2 \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad a_{n+1} = \frac{2}{b_{n+1}}$$

a) *Tracer sur une même figure les rectangles de longueur* b_n *et de largeur* a_n *pour* $n = 1, 2, 3$. *Quelle est l'aire de ces rectangles ?*

b) *Montrer que les suites* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *sont adjacentes. Quelle est leur limite ?*

c) *Que peut-on dire de la limite d'une suite de nombres rationnels ?*

10 La continuité

Définition 10.1 *Soit* $f :]a, c[\cup]c, b[\to \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que* f *a une limite finie en* c *lorsqu'il existe un réel* ℓ *tel que*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(|x - c| < \alpha \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon)$$

Alors on dit aussi que f tend vers ℓ *en* c, *et on note :*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell$$

On dit au contraire que f *a une limite infinie en* c *dans chacun des deux cas suivants. On dit que* f *tend vers* $+\infty$ *en* c *lorsque*

$$(\forall M > 0)(\exists \alpha > 0)(|x - c| < \alpha \ \Rightarrow f(x) > M)$$

On note alors :

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$$

On dit que f *tend vers* $-\infty$ *en* c *lorsque*

$$(\forall M > 0)(\exists \alpha > 0)(|x - c| < \alpha \ \Rightarrow f(x) < -M)$$

On note alors :

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

Définition 10.2 *Soit* $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que* f *a une limite finie en* $+\infty$ *lorsqu'il existe un réel* ℓ *tel que*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists A > 0)(x > A \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon)$$

Alors on dit aussi que f *tend vers* ℓ *en* $+\infty$, *et on note :*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

On dit au contraire que f *a une limite infinie en* $+\infty$ *dans chacun des deux cas suivants. On dit que* f *tend vers* $+\infty$ *en* $+\infty$ *lorsque*

$$(\forall M > 0)(\exists A > 0)(x > A \ \Rightarrow \ f(x) > M)$$

On note alors :

$$\lim_{x\to+\infty} = +\infty$$

On dit que f tend vers $-\infty$ en $+\infty$ lorsque

$$(\forall M>0)(\exists A>0)(x>A \ \Rightarrow\ f(x)<-M)$$

On note alors :

$$\lim_{x\to+\infty} = -\infty$$

Il y a une définition semblable pour les limites en $-\infty$ d'une fonction $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$.

Attention : en un point $c \in [a,b]$, ou bien en $\pm\infty$, il peut arriver qu'une fonction n'ait pas de limite. Quand f n'a pas de limite en c, il arrive parfois qu'elle ait quand même une *limite à droite* ou une *limite à gauche*. C'est l'objet de la définition suivante.

Définition 10.3 *Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $c \in [a,b[$. On dit que f a une* limite à droite *finie en c lorsqu'il existe un réel ℓ tel que*

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \alpha>0)(0<x-c<\alpha \ \Rightarrow\ |f(x)-\ell|<\varepsilon)$$

On note alors :

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \ell$$

On dit au contraire que f a une limite à droite *infinie en c dans chacun des deux cas suivants :*

$$(\forall M>0)(\exists \alpha>0)(0<x-c<\alpha \ \Rightarrow f(x)>M)$$

$$(\forall M>0)(\exists \alpha>0)(0<x-c<\alpha \ \Rightarrow f(x)<-M)$$

On note alors :

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$$

Il y a une définition semblable pour les *limites à gauche* en un point $c \in\ ]a,b]$, en substituant $c-x$ à $x-c$ dans la définition ci-dessus. Lorsque ℓ est la limite à gauche de f en c, on note :

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \ell$$

Propriété 10.1 *Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction, et $c \in]a,b[$. Supposons que f ait à la fois une limite à gauche et une limite à droite en c, et que ces deux limites soit finies et égales. Alors f a une limite en c, et*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x)$$

Dans le tableau p. 16, on trouve les formules pour calculer des limites sans avoir à revenir à la définition. Et dans le tableau p. 17, on trouve quelques limites remarquables.

Définition 10.4 (continuité) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction, et $c \in [a,b]$. On dit que f est* continue *en c lorsqu'elle a une limite en c et que cette limite est égale à $f(c)$:*

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

Si f est continue en c pour tout $c \in [a,b]$, on dit que f est continue sur l'intervalle $[a,b]$.

En accord avec les définitions précédentes, si f n'est pas définie en c, par exemple $f :]a,c[\cup]c,b[\to \mathbb{R}$, on ne peut parler, en toute rigueur, de continuité en c. Il est néanmoins possible qu'elle ait une limite en c. C'est l'objet de la définition suivante.

Définition 10.5 (prolongement par continuité) *Soit $f :]a,c[\cup]c,b[\to \mathbb{R}$ une fonction non définie en c. Supposons qu'elle ait une limite finie en c, soit $\ell \in \mathbb{R}$. On peut alors considérer la fonction suivante $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ définie par :*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in \,]a,c[\\ \ell \text{ si } x = c \\ f(x) \text{ si } x \in \,]c,b[\end{cases}$$

La fonction g est continue en c, et on dit qu'elle prolonge f par continuité en c.

Exercice 10.1 *Etude de la fonction $x \to \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.*

1) Démontrer que pout tout α dans $\mathbb{R}_+^\star$, il existe un entier naturel n tel que

$$0 < \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} < \alpha \text{ et } 0 < \frac{1}{n\pi + \frac{3\pi}{2}} < \alpha$$

2) On considère la fonction définie de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Démontrer que la fonction f ne peut avoir de limite réelle en 0^+. Expliquer pourquoi elle ne peut avoir comme limite en 0^+ ni $+\infty$, ni $-\infty$.

Exercice 10.2 *Pour chacune des fonctions f suivantes et pour les nombres réels a et l indiqués, on demande de :*

(a) trouver un voisinage de a (que l'on précisera) où l'on a :

$$|f(x) - l| < M|x-a| \text{ où } M \text{ ne dépend pas de } x$$

(b) trouver pour chaque $\epsilon > 0$ un nombre $\delta > 0$ tel que :

$$\text{si } |x-a| < \delta \text{ alors } |f(x) - l| < \epsilon$$

1) $f_1(x) = x^3,\ a \in \mathbb{R},\ l = a^3$

2) $f_2(x) = \sqrt{x},\ a > 0,\ l = \sqrt{a}$

3) $f_3(x) = \frac{x^2+3}{x-2},\ a = 1,\ l = -4$

4) $f_4(x) = x^2 + \frac{1}{x^2},\ a = 1,\ l = 2$

Exercice 10.3 *Pour chacune des fonctions f suivantes, donner le domaine de définition de la fonction f, indiquer si f a une limite à droite ou à gauche en x_0, si elle est continue à droite ou à gauche en x_0 et si elle est continue ou prolongeable par continuité en x_0 :*

1) f est définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6 \text{ si } x > 1 \\ -|x+4| \text{ si } x < 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}, \text{ et } x_0 = 1$$

Table 1 – Formules pour le calcul de limites

hypothèses	conséquence
$\begin{cases} \lim_{x\to c} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \\ \lim_{x\to c} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$	$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \ell_1+\ell_2$
$\begin{cases} \lim_{x\to c} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to c} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \text{ ou } +\infty \end{cases}$	$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = +\infty$
$\begin{cases} \lim_{x\to c} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to c} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \text{ ou } -\infty \end{cases}$	$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = -\infty$
$\begin{cases} \lim_{x\to c} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \\ \lim_{x\to c} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$	$\lim_{x\to c}(f(x)\times g(x)) = \ell_1\ell_2$
$\begin{cases} \lim_{x\to c} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to c} g(x) = \ell \in \mathbb{R}_+^\star \text{ ou } +\infty \end{cases}$	$\lim_{x\to c}(f(x)\times g(x)) = +\infty$
$\begin{cases} \lim_{x\to c} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to c} g(x) = \ell \in \mathbb{R}_+^\star \text{ ou } +\infty \end{cases}$	$\lim_{x\to c}(f(x)\times g(x)) = -\infty$
$\begin{cases} \lim_{x\to c} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to c} g(x) = \ell \in \mathbb{R}_-^\star \text{ ou } -\infty \end{cases}$	$\lim_{x\to c}(f(x)\times g(x)) = -\infty$
$\begin{cases} \lim_{x\to c} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to c} g(x) = \ell \in \mathbb{R}_-^\star \text{ ou } -\infty \end{cases}$	$\lim_{x\to c}(f(x)\times g(x)) = +\infty$
$\lim_{x\to c} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^\star$	$\lim_{x\to c}(1/f(x)) = 1/\ell$
$\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$	$\lim_{x\to c}(1/f(x)) = 0$
$\begin{cases} \lim_{x\to c} f(x) = \ell_1 \\ \lim_{x\to \ell_1} g(x) = \ell_2 \end{cases}$	$\lim_{x\to c} g\circ f(x) = \ell_2$

Table 2 – Quelques limites remarquables, croissances comparées

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

2) f est définie par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2} & si\ x>2\\ \dfrac{\sin 2(x-2)}{8-4x} & si\ x<2\end{cases},\ et\ x_0=2$$

3) $f(x)=E(x+3)$, $x_0=\sqrt{2}$ *où* $E(x)$ *est la partie entière de* x

4) $f(x)=E(x^2+3)$, $x_0=\sqrt{2}$

Exercice 10.4 *Calculer lorsqu'elle existe la limite en* x_0^-, x_0^+, $-\infty$, $+\infty$ *de la fonction* f *:*

1) $f(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{x-4}$, $x_0=4$

2) $f(x)=\dfrac{9}{x^2-1}$, $x_0\in\{-1,1\}$.

3) $f(x)=\dfrac{(x-1)|x-3|}{x^2-9}$, $x_0=3$

4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-x}{x-1}$, $x_0=1$

5) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$, $x_0=0$

Exercice 10.5 *Calculer les limites suivantes*

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{15}-6x^7-9$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+106x-24}{3x^3-30x^2-11}$

3) $\lim\limits_{-\infty}f$ *et* $\lim\limits_{+\infty}f$ *où* $f(x)=\sqrt{(x+p)(x+q)}-x$ *avec* $(p,q)\in\mathbb{R}^2$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$, $(a,b)\in(\mathbb{R}^\star)^2$

Exercice 10.6 *Etudier directement la continuité en chaque point de son domaine de définition des fonctions :* $f:x\to|x|$, $g:x\to\dfrac{x}{|x|}$ *et* $h:x\to\cos x$.

Exercice 10.7 *Soit* $g(x)=x^2+3x\cos x$, $x\in\mathbb{R}$. *Calculer* $\lim\limits_{+\infty}g$. *La fonction* g *est-elle croissante au voisinage de* $+\infty$ *?*

Exercice 10.8 *On considère la fonction* $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, *définie pour* $x \in \mathbb{R}^\star$.

a) *En quels points* f *prend-elle les valeurs 1 et -1 ? Montrer, en utilisant des suites, que* f *n'admet pas de limite quand* x *tend vers 0.*

b) *La fonction* f *est-elle continue sur* $\mathbb{R}^\star$ *? A-t-elle une limite en* $+\infty$ *ou en* $-\infty$ *?*

c) *Pour quelles valeurs de* λ *entier la fonction* $g(x) = x^\lambda f(x)$ *admet-elle un prolongement par continuité à* $\mathbb{R}$ *?*

11 Théorème de la Valeur Intermédiaire

Théorème 11.1 (Théorème de la Valeur Intermédiaire) *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* $[a,b]$, *alors toute valeur intermédiaire entre* $f(a)$ *et* $f(b)$ *a un antécédent.*

Autrement dit, si on a par exemple

$$f(a) < y < f(b)$$

alors il existe un $x \in [a,b]$ tel que $y = f(x)$.

Démonstration. Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < y$, on pose $a_1 = \frac{a+b}{2}$ et $b_1 = b$. Si au contraire $y < f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on pose $a_1 = a$ et $b_1 = \frac{a+b}{2}$. En tout cas, on a

$$y \in]f(a_1), f(b_1)[$$

On définit les suites (a_n) et (b_n) récursivement. Pour tout n, si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < y$, on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$. Si au contraire $y < f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$. Alors

$$y \in]f(a_{n+1}), f(b_{n+1})[$$

On vérifie (par récurrence) que (a_n) est une suite croissante, (b_n) une suite décroissante, et que pour tout n

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes donc toutes deux convergentes dans $\mathbb{R}$ et elles ont une même limite, notons-la x. Comme f est continue, on a :

$$f(x) = \lim f(a_n) \leq y$$

$$f(x) = \lim f(b_n) \geq y$$

Donc $f(x) = y$. Le théorème est ainsi démontré.

Théorème 11.2 (théorème de Weierstrass) *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* $[a,b]$, *alors il existe des réels* c *et* d *tels que* $f([a,b]) = [c,d]$.

Démonstration. On démontre d'abord que $f([a,b])$ a un maximum d. Supposons que tous les entiers n assez grands aient des antécédents, il existe alors une suite (u_n) qui vérifie

$$u_n \in [a,b], \qquad f(u_n) = n$$

Cette suite est bornée, on peut en extraire une suite convergente (u_{k_n}) qui converge vers une limite $\ell \in [a,b]$. Alors

$$\lim f(u_{k_n}) = f(l)$$

C'est impossible puisque $f(u_{k_n}) = k_n \longrightarrow +\infty$. Il existe donc un entier qui n'a pas d'antécédent.

Plus encore, deux entiers ayant des antécédents ne peuvent encadrer un entier n'en ayant pas (à cause du Théorème de la Valeur Intermédiaire). Donc pour N assez grand, aucun entier $n > N$ n'a d'antécédent. Par contre, il existe bien au moins un réel ayant un antécédent, par exemple $f(b)$ dont l'antécédent est b.

On définit par récurrence deux suites qui sont adjacentes. Posons d'abord $x_0 = f(b)$ et $y_0 = N$. Les deux suites étant définies jusqu'au rang i, deux cas de figures se présentent. Si $\frac{x_i+y_i}{2}$ a un antécédent, on pose :

$$x_{i+1} = \frac{x_i + y_i}{2}, \qquad y_{i+1} = y_i$$

Sinon, on pose :

$$x_{i+1} = x_i, \qquad y_{i+1} = \frac{x_i + y_i}{2}$$

On montre alors par récurrence que, pour tout i, x_i a un antécédent et y_i n'en a pas. On a d'autre part :

$$y_i - x_i = \frac{N - f(b)}{2^i}$$

Ces deux suites, adjacentes, convergent vers une limite commune, notons-la d.

Soit (v_n) une suite d'antécédents des x_n, et (v_{h_n}) une suite extraite convergente. Notons v sa limite. Alors

$$x_{h_n} = f(v_{h_n}) \longrightarrow f(v) = d$$

Donc $d \in f([a,b])$.

Soit d'autre part un réel $z > d$. Pour i assez grand on a

$$|y_i - d| < |z - d|$$

Autrement dit, $d < y_i < z$. Mais d a un antécédent, y_i n'en a pas, donc z n'en a pas non plus (sinon cela mettrait en défaut le Théorème de la Valeur Intermédiaire). On a donc montré qu'aucun réel $z > d$ n'a d'antécédent. Donc d est bien le maximum de $f([a,b])$.

On montrerait de même que $f([a,b])$ a un minimum c. Alors le Théorème de la Valeur Intermédiaire montre que tous les réels compris entre c et d ont un antécédent, c'est-à-dire que $f([a,b]) = [c,d]$. Et le Théorème de Weierstrass est ainsi démontré.

Exercice 11.1 *Donner un exemple de fonction f (qui pourra être donnée par son graphe), continue sur $[0,1]$, telle que $f(0)f(1) < 0$ et*

a) ayant une racine et une seule en $x = \frac{1}{2}$.

b) ayant exactement deux racines distinctes.

c) ayant une infinité de racines.

Exercice 11.2 *Montrer que les équations suivantes ont au moins une solution dans l'intervalle I :*

a) $x^7 - x^2 + 1 = 0$ et $I = [-2,0]$

b) $\sqrt{x^3 + 6x + 1} - 3x = 2$ et $I = \mathbb{R}_+$

Exercice 11.3 *Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (justifier vos réponses)*

a) *Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors la fonction f définie sur $[a,b]$ s'annule au moins une fois sur cet intervalle.*
b) *Si la fonction f, définie et continue sur $\mathbb{R}$, s'annule au moins une fois, alors il existe a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $f(a)f(b) < 0$.*
c) *Si une fonction f est continue sur $]a,b[$ et si on a*

$$\lim_{a^+} f \lim_{b^-} f = -1$$

alors f s'annule au moins une fois sur $]a,b[$.
d) *Si $f([a,b]) = [c,d]$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, alors f est continue sur $[a,b]$.*
e) *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Alors $|f|$ continue $\Rightarrow$ f continue.*

Exercice 11.4 *Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. Si on suppose de plus que f est décroissante, montrer que x est unique.*

Exercice 11.5 *Soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$. On suppose que $\forall x \in [a,b], f(x) > 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $f(x) \geq \lambda$ pour $x \in [a,b]$. Que peut-on dire si on remplace $[a,b]$ par $\mathbb{R}$ dans la question précédente ?*

Exercice 11.6 *On considère une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = 0$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?*

Exercice 11.7 *Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, périodique. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.*

Exercice 11.8 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la règle :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer qu'elle n'est continue en aucun point $x_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 11.9 *On considère les fonctions suivantes, définies dans un voisinage V de 0, le point 0 étant exclu :*

$$f_1(x) = (x^4+1)\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad f_2(x) = \frac{\sin(x^3)}{\cos(3x)-1}$$

Peut-on les prolonger par continuité au point 0 ? Si oui, donner le prolongement.

Exercice 11.10 *Soit f la fonction réelle définie par*

$$f(x) = \frac{x+1}{|x|-1}$$

a) *Déterminer le domaine de définition D_f de f.*
b) *Etant donné $\epsilon > 0$, calculer (en fonction de ϵ) un $\alpha > 0$ tel que*

$$x \in D_f \text{ et } |x| < \alpha \Longrightarrow |f(x)+1| < \epsilon$$

Que peut-on en déduire ?
c) *Déterminer si les limites suivantes existent, et dans ce cas les calculer :*

$$\lim_{-1} f, \qquad \lim_{1} f, \qquad \lim_{+\infty} f.$$

d) *La fonction f est-elle bornée sur D_f ? Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $0 < b < 1$. Montrer que la fonction f est bornée sur $]-\infty, b]$.*
e) *Montrer que $f([2,+\infty[) =]1,3]$. La fonction f atteint-elle ses bornes sur $[2,+\infty[$?*

TABLE 3 – Dérivées des fonctions usuelles

domaine	fonction	dérivée	
$\mathbb{R}$	x^n	nx^{n-1}	$(n \in \mathbb{Z})$
$\mathbb{R}_+^\star$	x^q	qx^{q-1}	$(q \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}_+^\star$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
$\mathbb{R}$	e^x	e^x	
$\mathbb{R}$	a^x	$a^x \ln a$	$(a \in \mathbb{R}_+^\star)$
$\mathbb{R}$	$\cos$	$-\sin$	
$\mathbb{R}$	$\sin$	$\cos$	
$]-1,1[$	Arcsin$x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$]-\infty,+\infty[$	Arctan$x$	$\frac{1}{1+x^2}$	

12 La dérivée

Définition 12.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction, et $c \in [a,b]$. On considère le « quotient différentiel » suivant :*

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

Si ce quotient a une limite quand x tend vers c, on dit que f est dérivable en c, et on note

$$f'(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

Si pour tout $c \in [a,b]$, f est dérivable en c, on dit que f est dérivable sur l'intervalle $[a,b]$.

Attention, une fonction dérivable est nécessairement continue, mais certaines fonctions continues ne sont pas dérivables. Pour dériver des fonctions sans avoir à revenir à la définition ci-dessus, il faut recourir aux formules dans le tableau p. 21.

Exercice 12.1 *En utilisant la définition, calculer la dérivée au point a des fonctions suivantes :*

(i) $f : x \mapsto x^2 - 4x + 5$ *;* $a = 2$

(ii) $f : x \mapsto x^3 - 4$ *;* $a \in \mathbb{R}$

Exercice 12.2 *En utilisant les théorèmes de dérivation (dérivée d'une puissance $n^{ème}$, d'une somme ou d'un produit de fonctions, d'une fonction composée, des fonctions trigonométriques...), calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes et indiquer l'ensemble de définition :*

i) $f(x) = \dfrac{9x^5-4}{8x^3+6}$

ii) $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{\sqrt{x}}$

iii) $f(x) = \dfrac{x^n}{(1+x)^n}$, $n \in \mathbb{N}$

iv) $f(x) = (x+\sqrt{1+x^2})^{-1}$

v) $f(x) = x\sin x + \cos x$

vi) $f(x) = \dfrac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x$

vii) $f(x) = \dfrac{\sin^m nx}{\cos^n mx}$, $(m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N})$

Exercice 12.3 *Calculer les limites suivantes, en les interprétant comme des dérivées :*

(i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^{16}-65536}{x-2}$

(ii) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos x - \frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}$

Exercice 12.4 *Soit H la courbe représentative de la fonction*

$$f(x) = -3x^2+5x-4$$

Déterminer les équations des tangentes à H aux points de H d'ordonnée -2.

Exercice 12.5 *Calculer les dérivées d'ordre 1 à* n, $n \in \mathbb{N}^\star$, *des fonctions suivantes :*

i) $f(x) = x^4-6x^2+5$, $n=5$

ii) $g(x) = (x-2)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}^\star$

iii) $h(x) = \cos 3x$, n *quelconque*

iv) fh, $n = 4p$, $p \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 12.6 *Après avoir calculé les dérivées à droite et à gauche en* a *(si elles existent), indiquer si la fonction est dérivable en* a *:*

i) $f(x) = \begin{cases} x^3-4x, & x<1 \\ x^2-3x, & x \geq 1 \end{cases}$ *et* $a=1$

ii) $f(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{3}{2}}\cos(\frac{1}{x}), & x<0 \\ 0, \quad x=0 & \\ x^{\frac{3}{2}}(2+x^{-\frac{1}{2}}), & x>0 \end{cases}$ *et* $a=0$

Exercice 12.7 *Calculer les dérivées des fonctions* $f\circ g$ *et* $g \circ f$ *(préciser le domaine de définition) :*

i) $f : x \mapsto \ln x$ *;* $g : x \mapsto x^2+4x-5$.

ii) $f : x \mapsto \tan^2 x$ *;* $g : x \mapsto \sqrt{x}$.

Exercice 12.8 *Déterminer les fonctions dérivées des fonctions :*

i) $x \mapsto x^3 \exp(\sin x)$

ii) $x \mapsto \dfrac{\ln(4x^2-1)}{2^{4x}}$

iii) $x \mapsto \ln(\ln(\ln x))$

Exercice 12.9 *Trouver un polynôme P tel que la dérivée du produit $P(x)e^x$ soit $e^x(x-1)(x-2)$.*

Exercice 12.10 *Calculer $S_n(x) = x + x^2 + \ldots + x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$. En déduire la somme*

$$S_n'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1},$$

pour $x \neq 1$. Calculer $S_n'(1)$.

Exercice 12.11 *On considère la fonction $f(x) = e^{(x-1)/x^2}$.*

a) Quel est le domaine de définition de f ? f admet-elle un prolongement par continuité à l'origine ?

b) Calculer la dérivée de f ; la courbe représentative de f admet-elle une tangente à l'origine ?

Exercice 12.12 *On considère la fonction f suivante :*

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{1+\sin x}$$

a) Quel est le domaine de définition D_f de f ?

b) On pose $E = D_f - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que f est dérivable sur E et calculer alors la dérivée de f ; f est-elle dérivable en 0 ?

c) On considère la fonction

$$g : \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xf(x) \end{array}$$

La fonction g est-elle dérivable en 0 ?

13 Théorème de Rolle et accroissements finis

Théorème 13.1 (Rolle) *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Le théorème de Rolle se démontre en remarquant qu'une telle fonction présente nécessairement un maximum absolu (Théorème de Weierstrass). En un tel point, la dérivée s'annule.

On déduit facilement du théorème de Rolle, moyennant un changement de repère, le théorème un peu plus général :

Théorème 13.2 (accroissements finis) *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$; alors il existe un $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c) \times (b-a)$.*

Exemple concret : si la distance parcourue par un mobile est une fonction continue et dérivable de la variable temps, pour tout trajet, il existe un instant où la vitesse instantanée du mobile est égale à sa vitesse moyenne sur ce trajet.

Exercice 13.1 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \mathrm{E}(x)$. Vérifier que $f(0) = f(1)$ et que f est dérivable sur $]0,1[$. Existe-t-il $c \in [0,1]$ tel que $f'(c) = 0$?*

Exercice 13.2 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x-2|$. Vérifier que $f(0) = f(4)$; f est-elle continue sur $[0,4]$? Existe-t-il $c \in [0,4]$ tel que $f'(c) = 0$?*

Exercice 13.3 *Les fonctions définies ci-dessous vérifient-elles les hypothèses du théorème de Rolle sur l'intervalle I ? Existe-t-il un nombre $c \in I$ tel que $f'(c) = 0$?*

(a) $f(x) = x^3$, $I = [-1,1]$

(b) $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2+x+1) \text{ si } x < 1 \\ 2x-4 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$, $I = [-1,2]$

Exercice 13.4 *Montrer que l'équation $3x + \cos x - 2 = 0$ a au plus une racine réelle.*

Exercice 13.5 *Soit $E =]0,1[\cup]1,2[$, et soit f la fonction définie sur E par :*

$$f(x) = \begin{cases} -2 \text{ si } x \in]0,1[\\ 1 \text{ si } x \in]1,2[\end{cases}$$

Calculer $f'(x)$ pour $x \in E$; que peut-on en déduire ?

Exercice 13.6 *Montrer que pour tout entier $p \geq 1$:*

(a) il existe un nombre réel $c \in]p, p+1[$ tel que $\ln\left(\frac{p+1}{p}\right) = \frac{1}{c}$.

(b) $\frac{1}{p} > \ln(p+1) - \ln(p) > \frac{1}{p+1}$

Exercice 13.7 *Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x$ (distinguer les cas $x > 0$ et $x < 0$).*

Exercice 13.8 *Montrer que pour $x > -1$ on a $\ln(1+x) \leq x$.*

Exercice 13.9 *Vérifier que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,*

$$1 + \tan^2 x > \frac{\tan x}{x} > 1$$

En déduire une valeur approchée de $\tan(0,1)$ à 10^{-2} près.

Exercice 13.10 *En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que*

$$\lim_{x \to +\infty} x^2(\ln(x+1) - \ln x) = +\infty$$

Exercice 13.11 *(a) Etudier les variations de la fonction $f(x) = x^2 + 1 - \ln x$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.*

(b) Soit $I =]0, \frac{1}{2}]$ et $J =]\frac{1}{2}, 1]$. Déterminer les ensembles $f(I)$, $f(J)$ et $f(\mathbb{R}_+^\star)$. Déterminer les bornes supérieures et inférieures de $f(I)$, $f(J)$ et $f(\mathbb{R}_+^\star)$. La fonction f atteint-elle ses bornes sur I, sur J ou sur $\mathbb{R}_+^\star$?

(c) Soit $m \in \mathbb{R}$, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 13.12 *Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + px + q$.*

(a) Etudier les variations de f (distinguer plusieurs cas).

(b) A quelle condition f possède-t-elle un maximum et un minimum locaux ? Calculer soigneusement ce maximum $M = f(x_0)$ et ce minimum $m = f(x_1)$.

(c) En déduire le nombre de racines réelles de l'équation $x^3+px+q=0$ *en fonction du signe du discriminant de cette équation* $\Delta=4p^3+27q^2$.

Exercice 13.13 *Soit* f *continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *telle que* $f(0)=3$ *et telle que* $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)=0$.

(a) Montrer qu'il existe au moins un nombre réel a *positif et un nombre réel* b *négatif tels que* $f(a)=f(b)=1$.

(b) Montrer que f' *s'annule au moins une fois sur* $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que f *possède un maximum absolu sur* $\mathbb{R}$. *Peut-on affirmer que ce maximum est compris entre les valeurs* a *et* b *trouvées ci-dessus ?*

14 Application : fonctions trigonométriques réciproques, logarithme, exponentielle et puissance.

Exercice 14.1 *Tracer le graphe d'une fonction* $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $i\in\{1,2,3\}$, *telle que :*

(a) f_1 *est injective et non surjective*

(b) f_2 *est surjective et non injective*

(c) f_3 *est bijective*

Exercice 14.2 *Donner des fonctions réciproques des fonctions suivantes, en précisant le domaine de définition :*

$$f_1(x)=1-2x,\qquad f_2(x)=\frac{1}{2x},\qquad f_3(x)=\sqrt{x-1},\qquad f_4(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}-\dfrac{x}{2} & si\ x\le 1\\ 3-2x & si\ x>1\end{cases}$$

Exercice 14.3 *Soit* f *une fonction définie et dérivable sur un intervalle* I *; on suppose que* f *est une bijection de* I *sur* $f(I)$.

(a) $1\in I$, $f(1)=3$ *et* $f'(1)=2$. *Que vaut* $(f^{-1})'(3)$ *?*

(b) $2\in I$, $f(2)=5$ *et* $(f^{-1})(5)=-2$. *Que vaut* $f'(2)$ *?*

Exercice 14.4 *On considère les application* f *et* g *de* $[0,\frac{\pi}{2}]$ *sur* $[0,1]$ *:*

$$f(x)=\sin x,\qquad g(x)=\cos x.$$

Soit l'équation :

$$(f\circ(g^{-1}))(x)=(g\circ(f^{-1}))(x)$$

Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont solutions de cette équation : $0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\sqrt{2},1,(\sqrt{2})^{-1}$ *?*

Exercice 14.5 *Vérifier les formules suivantes :*

(a) $2\mathrm{Arctan}\frac{1}{2}=\mathrm{Arctan}\frac{4}{3}$

(b) $2\mathrm{Arccos}\frac{3}{4}=\mathrm{Arccos}\frac{1}{8}$

(c) $\mathrm{Arctan}\frac{1}{2}+\mathrm{Arctan}\frac{1}{5}+\mathrm{Arctan}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

Exercice 14.6 *Simplifier les expressions suivantes :*

(a) $\tan(2\text{Arctan}x)$

(b) $\text{Arcsin}(2\sin x\cos x)$

(c) $\text{Arctan}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ *(poser* $x=\tan\phi$*, avec* $-\dfrac{\pi}{2}<\phi<\dfrac{\pi}{2}$*)*

Exercice 14.7 *Dans chacun des cas suivants, calculer le dérivée de la fonction* f *(en explicitant le domaine de validité du calcul), et utiliser le résultat obtenu pour simplifier l'expression de* f *et tracer son graphe :*

(a) $f(x)=\text{Arctan}\dfrac{1}{x}$

(b) $f(x)=\text{Arctan}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

(c) $f(x)=\text{Arccos}(2x^2-1)$

(d) $f(x)=\text{Arcsin}(3x-4x^3)$

Exercice 14.8 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *chacune des équations et inéquations suivantes :*

$$\ln x+\ln(x+5)=2\ln 2,\qquad \ln(x^2-1)=2\ln(x-3),$$

$$\ln(x-2)<3,\qquad \ln(3x^2-x)\leq \ln x+\ln 2.$$

Exercice 14.9 *Soit* f *la fonction réelle définie sur* $I=[e^{-1},+\infty[$ *par* $f(x)=x^{-1}+\ln x$*. Etudier les variations de* f *sur* I *(concavité, points d'inflexion). Tracer dans un même repère les graphes de la fonction* ln *et de la fonction* f*.*

Exercice 14.10 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations et inéquations suivantes :*

(i) $e^{3x+1}+e^{2x+1}=e^{x+2}+e^{2x+2}$

(ii) $(10^{x+2})^x=0,1$

(iii) $e^{-3x}<5$

(iv) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1}>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$

Exercice 14.11 *Calculer les limites suivantes, en justifiant vos calculs :*

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2+3}{x\ln x}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1+\sqrt{x}}}{x+2}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(3x+1)}{2x}$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to2^+}(x-2)^2\ln(x^3-8)$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x^a-(\ln x)^2)$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to0}(x^a-(\ln x)^2)$*, où* $a\in\mathbb{R}$*.*

Exercice 14.12 *Pour chacune des fonctions suivantes, trouver le domaine de définition, dériver, étudier le sens de variation, et calculer la limite en* 0 *:*

(i) $f(x)=x^x$

(ii) $g(x)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}$

(iii) $h(x)=(x(x-1)(x-2))^{\frac{3}{2}}$

15 Formule de Taylor

Théorème 15.1 (formule de Taylor) *Soit f une fonction réelle de classe C^n sur un intervalle $[a,b]$. Soit x et $x+h$ appartenant à cet intervalle. Alors il existe $\theta \in [0,1]$ tel que :*

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h)$$

Ce théorème est une conséquence du théorème des accroissements finis. Montrons-le dans le cas où $f(x) = f'(x) = \ldots = f^{(n-1)}(x) = 0$. Il faut alors montrer qu'il existe $\theta \in [0,1]$ tel que :

$$\frac{f(x+h)}{h^n/n!} = f^{(n)}(x+\theta h)$$

On fixe x et on considère la variable h. On va faire un changement de variable en posant

$$t = \frac{h^n}{n!}$$

On a alors :

$$h = \sqrt[n]{n!\ t}$$
$$\frac{dh}{dt} = \frac{(n-1)!}{(n!\ t)^{(n-1)/n}}$$

Le théorème des accroissements finis donne alors un c compris entre 0 et t tel que :

$$\frac{f(x+\sqrt[n]{n!\ t}) - f(x)}{t-0} = \frac{(n-1)!}{(n!\ c)^{(n-1)/n}} f'(x+\sqrt[n]{n!\ c})$$

Soit $\theta \in [0,1]$ tel que

$$\theta h = \sqrt[n]{n!\ c}$$

Le rapport ci-dessus est alors :

$$\frac{f(x+h)}{h^n/n!} = \frac{f'(x+\theta h)}{(\theta h)^{n-1}/(n-1)!}$$

De proche en proche, on montre ainsi l'existence de $\theta, \theta_2, \ldots, \theta_n$ tels que

$$\frac{f(x+h)}{h^n/n!} = \frac{f'(x+\theta h)}{(\theta h)^{n-1}/(n-1)!} = \ldots = \frac{f^{(n-1)}(x+\theta_{n-1}h)}{(\theta_{n-1}h)/1!} = f^{(n)}(x+\theta_n h)$$

16 Exercices : formule de Taylor, développements limités.

Exercice 16.1 *a) Montrer :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 1+x \geq e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2}e^{|x|}$$

$$\forall x > 0 \quad x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

b) En écrivant la formule de Taylor à l'ordre n pour la fonction e^{-x} en 0, montrer que l'on a :

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} + r_n$$

où $0 < |r_n| < \dfrac{1}{(n+1)!}$.

Exercice 16.2 *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *où* $I =]a-\epsilon, a+\epsilon[$, $\epsilon > 0$. *Calculer*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$$

Exercice 16.3 *Soient* $a_0, a_1, ..., a_n$ *des réels et* $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$.

(a) Ecrire la formule de Taylor à l'ordre n *pour la fonction polynôme* P *au point* a $(a \in \mathbb{R})$

(b) On dit que a *est une racine de* P *d'ordre* k $(1 \le k \le n)$ *s'il existe un polynôme* $Q(x)$ *vérifiant* $P(x) = (x-a)^k Q(x)$ *et* $Q(a) \neq 0$. *Montrer que* a *est une racine de* P *d'ordre* k *si et seulement si*

$$P(a) = P'(a) = ... = P^{(k-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(k)}(a) \neq 0$$

Exercice 16.4 *Calculer* $\sqrt{4,0007}$ *à* 10^{-12} *près.*

Exercice 16.5 *(a) Montrer que, pour tout réel* t, $|\sin t - t| \le \frac{|t|^3}{6}$

(b) Pour $x \in \mathbb{R}^\star$ *on pose* $F(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$. *En écrivant* $\frac{\sin t}{t^2} = \frac{\sin t}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t}$, *calculer* $\lim_{x\to 0} F(x)$.

Exercice 16.6 *Donner le développement limité de*

(a) $x \longrightarrow e^{\tan x}$ *à l'ordre 3 en 0*

(b) $x \longrightarrow \mathrm{Arcsin} x - \ln(1+x)$ *à l'ordre 3 en 0*

(c) $x \longrightarrow \dfrac{e^{\sqrt{1+x}} - e}{\mathrm{Arctan} x - \ln(1-x)}$ *à l'ordre 2 en 0*

Exercice 16.7 *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\mathrm{Arcsin}(x^3)}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x \left[(1+\frac{2}{x})^x - (1+\frac{1}{x})^{2x} \right]$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4\sin^2 \frac{x}{2}} \right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + 2\ln(\cos x)}{x^2(1-\cos(2x))}$$

Exercice 16.8 *Soit* f *la fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \in \mathbb{R}^\star \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f *est dérivable en 0, qu'elle admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, mais qu'elle n'est pas deux fois dérivable en 0.*

Exercice 16.9 *Dans chacun des cas suivants, déterminer si le graphe de* f *admet des asymptotes et préciser alors sa position par rapport aux asymptotes.*

(a) $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

(b) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+x+1}$, $x \in \mathbb{R}^\star$

(c) $f(x) = x^4\left(\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\right)$, $x \in \mathbb{R}^\star$

Exercice 16.10 *Soit* $f(x) = (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ *pour* $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[-\{0\}$. *Montrer que* f *se prolonge en une fonction continue sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *et dérivable en 0. Etudier la position de son graphe par rapport à la tangente en* $x = 0$.

Exercice 16.11 *Déterminer le domaine de définition de* $f(x) = \dfrac{\ln x}{2x-1} + \dfrac{5x^2}{2}$. *Etudier la position de son graphe par rapport à la tangente au point d'abscisse* $x = 1$.

Exercice 16.12 *Soit* $f(x) = 1 + x + \dfrac{2x\ln|x|}{1-x}$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f. *Peut-on prolonger* f *en une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *? Etudier alors la dérivabilité de* f.

(b) Calculer $f'(x)$. *Etudier les variations de* f.

(c) Construire le graphe de f, *en précisant sa position par rapport à la tangente aux points d'abscisses 0 et 1, et en précisant l'allure des branches infinies (y a-t-il des asymptotes ?).*

17 Équations différentielles autonomes d'ordre 1

Exercice 17.1 *Résolvez les* équations différentielles d'ordre 1 autonomes *suivantes :*

$$y' + y^2 + 1 = 0, \qquad y' = 16 - y^2 \text{ où } -4 < y < 4$$

$$y' = ay \text{ où } a \text{ est une constante}, \qquad y' = \sqrt{y}, \qquad y' = y^2$$

Exercice 17.2 *a) La* ***chute d'une masse ponctuelle*** m *dans un champ de pesanteur uniforme obéit à l'équation suivante (conservation de l'énergie totale) :*

$$h = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx$$

où h *est une constante réelle. Résolvez cette équation différentielle.*

b) En supposant que l'air ambiant oppose une résistance au mouvement proportionnelle au carré de la vitesse, l'équation du mouvement est de la forme :

$$m\ddot{x} = -mg - k\dot{x}^2$$

Prenez la vitesse $v = \dot{x}$ *comme fonction inconnue, déterminez l'équation différentielle en* v *puis résolvez-la.*

Exercice 17.3 *La* loi de Hooke *décrit le mouvement d'un* ***oscillateur harmonique****, c'est-à-dire d'une petite masse* m *à l'extrémité d'un ressort qui exerce sur elle une force de rappel lorsqu'elle est écartée de la position* $x = 0$ *:*

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = h$$

où h *est l'énergie totale et* k *est un coefficient constant appelé* raideur *du ressort. Résolvez cette équation différentielle.*

Exercice 17.4 *On considère un **pendule simple**, c'est-à-dire une masse ponctuelle m suspendue à une tige (de poids négligeable) de longueur ℓ et soumise à l'action de la pesanteur. L'angle θ formé par la tige avec la direction verticale obéit à l'équation différentielle :*

$$\frac{1}{2}\ell\dot{\theta}^2 + 2g\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{h}{m\ell}$$

Résolvez cette équation différentielle.

18 Équations différentielles d'ordre 2

Exercice 18.1 *Résolvez les équations différentielles suivantes :*

1) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$*, avec pour conditions aux limites* $\dfrac{dx}{dt}(0) = -1$ *et* $x(0) = 0$.

2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 4\dfrac{dx}{dt} + 4x = 0$*, avec pour conditions aux limites* $\dfrac{dx}{dt}(0) = -2$ *et* $x(0) = 1$

3) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 5\dfrac{dx}{dt} + 4x = 4t^2$*, avec pour conditions aux limites* $\dfrac{dx}{dt}(0) = 2$ *et* $x(0) = 1$ *(on cherchera d'abord une solution particulière de la forme* $at^2 + bt + c$*).*

4) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + x = 4\cos(2t)$*, avec pour conditions aux limites* $\dfrac{dx}{dt}(0) = 0$ *et* $x(0) = 1$*. On cherchera d'abord une solution particulière de la forme* $R\cos(kt) + S\sin(kt)$ *ou bien* $t(R\cos(kt) + S\sin(kt))$*.*

Exercice 18.2 *On suppose que la consommation d'un pays* $C(t)$ *est liée au revenu* $Y(t)$ *et à son évolution* $Y'(t)$ *par l'équation*

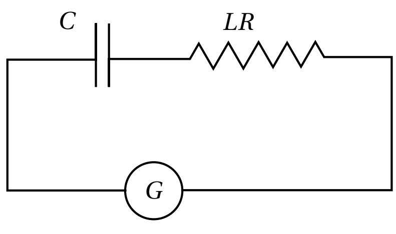
$$C(t) = cY(t) - Y'(t), \qquad 0 < c < 1,$$

et que l'investissement $I(t)$ *correspondant est* $I(t) = \beta C'(t)$*, avec* $\beta > 0$*, et que le bilan total impose*

$$Y(t) = C(t) + I(t) + G$$

où G (la dépense totale du gouvernement) est une constante positive. Les coefficients β *et* c *sont respectivement appelés accélérateur et multiplicateur. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par* Y*. Préciser ensuite l'allure de la solution (stable, instable, oscillante amortie ou amplifiée) selon les valeurs des paramètres* β *et* c*.*

Exercice 18.3 *On considère le circuit en série représenté sur la figure, constitué d'un générateur qui délivre une tension alternative* $u = U\cos(kt)$*, d'un condensateur de capacité* C *et d'une bobine d'inductance L.*



1. *On suppose d'abord que la résistance R de la bobine est nulle.*

(a) *On rappelle que* $i = \dfrac{dq}{dt}$*. Quelle est, à un instant* t *quelconque, la tension aux bornes du condensateur ? de la bobine ?*

(b) *Etablir l'équation différentielle vérifiée par* q*.*

(c) *Intégrer cette équation différentielle. A l'instant initial, la charge dans le circuit ainsi que l'intensité du courant sont nulles.*

(d) *Que vaut l'intensité du courant en fonction du temps ?*

2. *Désormais, la résistance* R *n'est pas nulle. Mais on n'utilise plus de générateur, et on charge le condensateur d'une charge* Q *à l'instant initial. L'intensité du courant à l'instant initial est toujours nulle.*

   (a) *Quelles sont les tensions aux bornes du condensateur et de la bobine à un instant* t *quelconque ?*

   (b) *Etablir l'équation différentielle vérifiée par* q*.*

   (c) *Intégrer cette équation. Discuter, suivant les valeurs de* R*,* L *et* C*, l'allure de la courbe de* q *en fonction du temps.*

19 TP – Résolution numérique d'équations différentielles

Théorème Soit f une fonction continue définie sur un intervalle fini $[a, b]$ et $y_0 \in [a, b]$. Alors il existe une solution $t \to y(t)$ de l'équation différentielle $y' = f(y)$ telle que $y(0) = y_0$. Elle est au moins définie sur l'intervalle suivant :

$$\left[-\frac{D}{M}, \frac{D}{M}\right]$$

où $D = \min(|y_0 - a|, |y_0 - b|)$ et $M = \max_{[a,b]} |f|$.

Question 1 On peut calculer la solution dont le théorème précédent prédit l'existence de manière approchée en discrétisant l'intervalle de temps. On choisit un pas $\Delta t > 0$ et on pose :

$$y_n = y(n\Delta t)$$

Alors la suite définie par

$$y_{n+1} = y_n + f(n\Delta t)\Delta t$$

est cette solution approchée. Expliquez pourquoi c'est une solution approchée. Réalisez une routine en C ou en C++ qui exécute ce calcul et renvoie :

- un tableau contenant les y_n représentés par des flottants
- une liste de points $(n\Delta t, y_n)$ affichée à l'écran
- le graphe représentant la fonction $t \to y(t)$

Pour les primitives graphiques, on pourra utiliser `pl_selectpl`, `pl_newpl`, `pl_openpl`, `pl_closepl`, `pl_fspace`, `pl_fcont` (bibliothèque `libplot` de la suite logicielle *GNU plotutils*).

Question 2 Utilisez la routine précédente pour résoudre l'équation du pendule simple (*cf.* feuille d'exercices précédente). On prendra $l = 1$ m, $g = 10$ ms^{-2}, $m = 1$ kg, $h = 40$ J. Condition initiale : $\theta_0 = 0$. Montrez que le théorème permet de calculer une solution approchée pour $t \in [0, T]$ quelque soit T. On essaiera avec $T = 1$ s, 10 s, 60 s.

Pour coder la fonction f, on pourra utiliser la bibliothèque standard C et son fichier d'entête `math.h`.

Question 3 On cherche une autre méthode de résolution numérique. On voudrait utiliser la méthode vue en cours. Elle suppose un calcul d'intégrale. Vous avez vu au semestre précédent comment calculer une intégrale de manière approchée au moyen des sommes de Riemann : utilisez cette méthode pour calculer l'intégrale

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{f(y)}.$$

Modifiez la routine de la question 1 pour appliquer cette nouvelle méthode.

Question 4 En utilisant la routine de la question 1, on voudrait concevoir un programme pour résoudre n'importe quelle équation différentielle autonome d'ordre 1. Il devra prendre en arguments de la ligne de commande :

- la fonction f
- un intervalle de temps $[0,T]$
- la condition initiale y_0
- le nombre de pas $N = \dfrac{T}{\Delta T}$

Expliquez comment réaliser un tel programme.

20 Séries numériques

Exercice 20.1 *Soit a un réel strictement positif, α un réel quelconque et q un entier non nul. Déterminer la nature des séries de terme général u_n :*

$$a)\ u_n = \frac{a^n}{2-\cos n} \quad b)\ u_n = \frac{|\sin(\frac{n\pi}{2})|}{n^\alpha} \quad c)\ u_n = \frac{(\ln n)^{100}}{\sqrt{n}(1,01)^n} \quad d)\ u_n = \frac{n^2}{2^n}$$

$$e)\ u_n = \frac{(n!)^3}{(3n)^n} \quad f)\ u_n = \frac{n!}{(qn)^n} \quad g)\ u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \quad h)\ u_n = n^\alpha \exp(-\sqrt{n})$$

Exercice 20.2 *Calculer les sommes partielles de la série de terme général $\frac{1}{n^2-1}$ et en déduire que cette série converge. Quelle est sa somme ?*

Exercice 20.3 *Pour tout entier n non nul, on pose*

$$u_n = \ln(n!) - (n+\frac{1}{2})\ln(n) + n \qquad v_{n+1} = u_n - u_{n-1}$$

1. *Montrer que la série de terme général v_n converge. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$?*
2. *Montrer qu'il existe un réel k strictement positif tel que $n!$ soit équivalent à $k\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n$ quand n tend vers l'infini.*

Exercice 20.4 1. *Ecrire sous forme de fraction les rationnels suivants :*

$$a = 0,444\overline{4}... \qquad b = 2,7185185\overline{185}...$$

2. *Calculer le nombre $0,81\overline{81}... \times 3,66\overline{6}...$.*

Exercice 20.5 *Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes positifs. Vrai ou faux ?*

1. *Si $\sum a_n$ converge alors $\sum a_n^2$ converge.*
2. *Si $\sum a_n$ diverge alors $\sum a_n^2$ diverge.*

3. $\sum a_n$ converge si et seulement si $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ converge.
4. Si $\sum a_n$ converge alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de na_n est nulle.
5. Si la limite quand n tend vers $+\infty$ de na_n est nulle alors $\sum a_n$ converge.
6. Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent alors $\sum \sqrt{a_n b_n}$ converge.

Exercice 20.6 *Soit un réel a strictement positif, pour tout entier n non nul, on pose*

$$u_n = a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$$

Pour quelles valeurs de a la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ tend-elle vers zéro ? Pour ces valeurs, utiliser la comparaison entre une série et une intégrale pour donner un encadrement de u_n. Pour quelles valeurs de a la série de terme général u_n converge-t-elle ?

Exercice 20.7 *Pour un réel $\alpha > 1$, on considère la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ et on note $S(\alpha)$ sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.*

1. *Montrer que pour tout $n \geq 2$ et tout entier p non nul, on a :*

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+p)^{\alpha-1}}\right)$$

   En déduire une majoration du reste R_n de la série. Donner de la même façon une minoration de R_n.

2. *Montrer que $S(\alpha)$ est équivalent à $\frac{1}{\alpha-1}$ quand α tend vers 1.*

Exercice 20.8 *Soit a un nombre complexe. Déterminer la nature (absolue convergence, semi-convergence, divergence) des séries de terme général u_n :*

$$a)\ u_n = \frac{(-1)^n}{n+\sin n} \qquad b)\ u_n = (-1)^n \frac{(\ln n)^a}{n} \qquad c)\ u_n = a^n \sin(\frac{1}{n})$$

Exercice 20.9 *Soit a un nombre réel. Déterminer la nature (absolue convergence, semi-convergence, divergence) des séries de terme général u_n :*

$$a)\ u_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n} \qquad b)\ u_n = \ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{a}{n})$$

$$c)\ u_n = \ln(\sqrt{n} + \sin n) + a \ln n \qquad d)\ u_n = n^{-\frac{1}{n}} \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^a})$$

Table des matières