La relativité restreinte

Erwan Penchèvre

25 février 2015

Plan

- Ligne d'univers
- Choix d'unité, vitesse de la lumière $c = 1$
- Quatre coordonnées d'espace-temps
  de la dimension d'une longueur
- Les lois de la dynamique et les lois de Maxwell sont invariantes
  sous le groupe des transformations de Lorentz.

transformation de Lorentz

nouveau système de coordonnées x'^α, ancien système x^α :

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha$$

où a^α et $\Lambda^\alpha{}_\beta$ sont des constantes, et

$$\Lambda^\alpha{}_\gamma \Lambda^\beta{}_\delta \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta}$$

avec

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & \text{si } \alpha = \beta = 1, 2 \text{ ou } 3 \\ -1 & \text{si } \alpha = \beta = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Invariance du temps propre $d\tau$

$$d\tau^2 = dt^2 - d\mathbf{x}^2 = -\eta_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$$

Démonstration

$$\begin{aligned} d\tau'^2 &= -\eta_{\alpha\beta}\,dx'^\alpha\,dx'^\beta \\ &= -\eta_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\gamma\Lambda^\beta{}_\delta\,dx^\gamma\,dx^\delta \\ &= -\eta_{\gamma\delta}\,dx^\gamma\,dx^\delta \end{aligned}$$

Conséquence

La vitesse de la lumière $|d\mathbf{x}/dt|$ est la même dans tous les repères inertiels.

Démonstration

Si $d\tau = 0$, alors $d\tau' = 0$.

Pour toute transformation de Lorentz, on a

$$\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 = 1 + \sum_{i=1,2,3}\left(\Lambda^i{}_0\right)^2, \qquad (\det\Lambda)^2 = 1$$

Transformation de Lorentz propre

Un transformation de Lorentz est dite propre si elle vérifie de plus les conditions suivantes :

$$\Lambda^0{}_0 \geq 1, \qquad \det\Lambda = +1$$

Transformations impropres

- Renversement du temps
- Symétrie orthogonale par rapport à un plan

Etude d'une transformation de Lorentz

x^α : particule au repos
x'^α : particule en mouvement rectiligne uniforme, vitesse $\mathbf{v}$

- Changement de coordonnées pour $d\mathbf{x}$ et dt :

$$dx'^i = \Lambda^i{}_0\,dt \text{ pour } i = 1,2,3$$

$$dt' = \Lambda^0{}_0\,dt$$

- $\mathbf{v} = d\mathbf{x}'/dt'$ donc $\Lambda^i{}_0 = v_i\Lambda^0{}_0$
- Conditions sur les $\Lambda^\alpha{}_\beta$:

$$-1 = \Lambda^\alpha{}_0\Lambda^\beta{}_0\eta_{\alpha\beta}$$

- La matrice Λ est donc de la forme

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma, \qquad \Lambda^i{}_0 = \gamma v_i, \qquad \text{où } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}$$

Les transformations $\Lambda(\mathbf{v})$

On notera $\Lambda(\mathbf{v})$ la transformation de Lorentz définie par

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma$$
$$\Lambda^i{}_0 = \gamma v_i$$
$$\Lambda^0{}_j = \gamma v_j$$
$$\Lambda^i{}_j = \delta_{ij} + v_i v_j \frac{\gamma - 1}{\mathbf{v^2}}$$

avec $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}$.

Exemple

(l'écrire en restaurant c)

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition

Toute transformation de Lorentz propre s'écrit comme composée de trois transformations :

- un $\Lambda(\mathbf{v})$
- une matrice de rotation R
- une translation $x^\alpha \mapsto x^\alpha + a^\alpha$

Démonstration

Les conditions auxquelles sont soumis les ${\Lambda^\alpha}_\beta$ sont au nombre de 10.
Il y a 16 coefficients dans une matrice 4 x 4.
Il y a 3 paramètres dans les $\Lambda(\mathbf{v})$.
Il y a 3 paramètres dans une matrice de rotation.

Conséquences du passage de la relativité newtonienne à la relativité restreinte :

- invariance de la vitesse de la lumière
- contraction des distances
- ralentissement des horloges

Coordonnées $\mathbf{x}, t$

Horloge au repos
Intervalle d'espace-temps entre deux tic-tac :

$$d\mathbf{x} = 0, \quad dt = \Delta t, \qquad d\tau = \Delta t$$

Coordonnées $\mathbf{x}', t'$

L'horloge mue à la vitesse $\mathbf{v} = d\mathbf{x}'/dt'$

$$d\tau = \sqrt{1 - \mathbf{v}^2}\, dt'$$

Donc pour l'observateur qui voit l'horloge se mouvoir, intervalle de temps entre deux tic-tac :

$$dt' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}$$

Effet Doppler

ralentissement des horloges + Doppler = effet Doppler relativiste
Chaque tic-tac émet un signal lumineux vers l'observateur.
Le tic-tac suivant est émis après que l'horloge a parcouru une distance $v_r dt'$. Il subira un retard de $v_r dt'$.
Intervalle de temps séparant la réception de deux signaux :

$$(1 + v_r)\, dt' = \frac{1 + v_r}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \Delta t$$

Exemple

Décalage du spectre émis par les galaxies lointaines

$$\frac{\nu_{\text{observée}}}{\nu} = \frac{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}{1 + v_r}$$

Si $v_r > 0$, décalage vers le rouge.

La seconde loi de Newton n'est pas invariante.
$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$ n'est pas un quadri-vecteur.
$\Rightarrow$ nouvelle définition du concept de force.

$$f^\alpha = m\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}$$

- Pour une particule momentanément au repos, (f^1, f^2, f^3) sont les composantes de la force non-relativiste $\mathbf{F}$, et $f^0 = 0$.
- f^α est un quadri-vecteur.

Comment calculer f^α si on connaît $\mathbf{F}$?

Particule de vitesse instantanée $\mathbf{v}$ en coordonnées x^α
Alors

$$\mathbf{f} = \mathbf{F} + (\gamma - 1)\mathbf{v}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}}{\mathbf{v}^2}$$

$$f^0 = \gamma\mathbf{v}\cdot\mathbf{F} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{f}$$

Démonstration

Choisir x'^α tel que

$$x^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta(\mathbf{v})x'^\beta$$

Mais f^α est un quadri-vecteur :

$$f^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta(\mathbf{v})f'^\alpha$$

et f'^α est donné par la force non-relativiste
car dans les coordonnées x'^α la particule est au repos.

Attention aux conditions initiales

Quand on résoud l'équation différentielle $f^\alpha = m\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}$,
il faut choisir des conditions initiales pour lesquelles τ est le temps propre, c'est-à-dire

$$-1 = \eta_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}$$

Le quadri-vecteur impulsion

On définit le quadri-vecteur impulsion par :

$$p^\alpha = m\frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

Alors la seconde loi de la dynamique s'écrit :

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = f^\alpha$$

où $d\tau$ est le temps propre.

p^α pour un particule de vitesse $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \qquad d\tau = \sqrt{1-\mathbf{v}^2}\,dt$$

- Composantes spatiales du quadri-vecteur impulsion :

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}$$

  Si on interprète ça comme une quantité de mouvement, on est tenté de dire qu'une particule de masse au repos m a une masse plus grande $\frac{m}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}$ quand elle est se meut !
- Composante temps :

$$p^0 = E = \frac{m}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}$$

$E = mc^2$

Pour $\mathbf{v} \ll 1$, développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$\frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} = 1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + O(\mathbf{v}^4)$$

Alors

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + O(\mathbf{v}^3)$$

$$E = m + \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + O(\mathbf{v}^4)$$

On retrouve Newton en première approximation, sauf m !
Energie totale = masse + énergie cinétique

Lois de conservation

- Pour que notre interprétation du quadri-vecteur impulsion soit correcte, il faudrait des lois de conservation.
- Si on a une loi de conservation dans un système x^α, elle sera encore vérifiée dans le système $x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\alpha$.
- Un seul repère inertiel suffit donc à vérifier que E et $\mathbf{p}$ se conservent. C'est ce qu'a fait la physique newtonienne pour les petites vitesses.
- Détruire de la masse (radioactivité, fusion nucléaire, fission) libère beaucoup d'énergie cinétique.

Relation de dispersion

Éliminer $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E}$$

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$$

Particule de masse nulle : forme indéterminée.
Pourtant la relation $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E}$ garde un sens en physique quantique. Pour le photon, de masse nulle, elle équivaut à la relation de dispersion :

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

La physique quantique est compatible avec la relativité restreinte.

- Reste à écrire les lois de l'électrodynamique sous forme invariante.
- Comment construire des grandeurs invariantes pour le groupe de Lorentz ?
- Solution : le calcul tensoriel
- Cela servira aussi à la relativité générale

- Quadri-vecteur contravariant V^α
$$V'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta V^\beta$$
- Quadri-vecteur covariant U_α
$$\Lambda^\alpha{}_\beta U'_\alpha = U_\beta$$
- Matrice inverse de Λ
$$\Lambda_\alpha{}^\gamma \Lambda^\alpha{}_\beta = \delta^\gamma{}_\beta$$
- On notera aussi $\eta^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, de sorte que
$$\eta^{\beta\delta}\eta_{\alpha\delta} = \delta^\beta{}_\alpha$$
- Si V^α est contravariant, alors $\eta_{\alpha\beta} V^\beta$ est covariant.
- Si U_α est covariant, alors $\eta^{\alpha\beta} U_\alpha$ est contravariant.

- Invariant : produit scalaire d'un vecteur covariant et d'un vecteur contravariant.
- Les différentielles dx^α sont contravariantes.
- Le gradient $\partial/\partial x^\alpha$ est covariant.
- Invariant : divergence d'un vecteur contravariant
- Invariant : le d'Alembertien $\Box^2 = \nabla^2 - \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ (produit scalaire du gradient avec lui-même, mais attention au produit scalaire de deux vecteurs covariants...)

Une grandeur invariante s'appelle un scalaire.

Les tenseurs

Outre scalaires et vecteurs, il y a des tenseurs.
Nombreuses composantes (plusieurs indices)

Exemple 1

Les matrices sont des tenseurs.

Exemple 2

Un tenseur $T^\gamma{}_{\alpha\beta}$: 64 composantes
Indice γ contravariant, indices α et β covariants.
Changement de coordonnées :

$$T'^\gamma{}_{\alpha\beta} = \Lambda^\gamma{}_\delta \Lambda_\alpha{}^\epsilon \Lambda_\beta{}^\zeta T^\delta{}_{\epsilon\zeta}$$

Attention à l'ordre des indices $\Lambda_\alpha{}^\beta \neq \Lambda^\alpha{}_\beta \neq \Lambda_\beta{}^\alpha$

Comment construire des tenseurs ?

Combinaisons linéaires

Mathématiquement, étant donné un espace vectoriel,
un tenseur est un vecteur élément d'un autre espace vectoriel
construit à partir du premier (peu importe comment...).
$\Rightarrow$ une combinaison linéaire de tenseurs est un tenseur

Produits directs

Soit $A^{\alpha}{}_{\beta}$ et B^{γ} des tenseurs,
alors $T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma} = A^{\alpha}{}_{\beta} B^{\gamma}$ est un tenseur.

Contraction

Si $T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma\delta}$ est un tenseur, alors $T^{\alpha\gamma} = T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma\beta}$ est un tenseur.

Dérivées

Si $T^{\beta\gamma}$ est un tenseur, alors $T_{\alpha}{}^{\beta\gamma} = \dfrac{\partial \left(T^{\beta\gamma}\right)}{\partial x^{\alpha}}$ est un tenseur.

Certains tenseurs sont en fait invariants

Tenseur de Minkowski

Invariant : le tenseur covariant $\eta_{\alpha\beta}$
Invariant : le tenseur contravariant $\eta^{\alpha\beta}$
(cf. définition du groupe de Lorentz)
Invariant : le symbole de Kronecker $\delta^{\alpha}{}_{\beta} = \eta^{\alpha\gamma}\eta_{\gamma\beta}$

Tenseur de Levi-Civita

Invariant :

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{si } \alpha\beta\gamma\delta \text{ est une permutation paire de } 0123 \\ -1 & \text{si c'est une permutation impaire} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$(\det \Lambda = 1)$

Tenseur nul

Un tenseur dont toutes les coordonnées sont nulles est bien sûr invariant.

Proposition

Le fait qu'un tenseur s'annule est invariant par le groupe de Lorentz.

Démonstration

Si par exemple

$$(\forall \gamma, \delta) \quad T^{\gamma}{}_{\delta} = 0,$$

alors

$$(\forall \alpha, \beta) \quad T'^{\alpha}{}_{\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma} \Lambda_{\beta}{}^{\delta} T^{\gamma}{}_{\delta} = 0,$$

et réciproquement.

Principe méthodologique

Les lois de la physique sont invariantes par le groupe de Lorentz.
Quand on décrit une loi par une équation contenant des tenseurs,
il est facile de voir si elle est invariante ou non.

Les lois de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Problème

Récrire les lois de Maxwell sous forme tensorielle.

Deux tenseurs :

- un quadri-vecteur courant J^α
- un tenseur contravariant, le champ électromagnétique $F^{\alpha\beta}$

Cas particulier : distribution de charges ponctuelles

La $n^{\text{ème}}$ particule porte une charge électrique e_n
et suit une trajectoire $t \mapsto \mathbf{x}_n(t)$.

Densité de charge

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \sum_n e_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t))$$

Densité de courant

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \sum_n e_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{d\mathbf{x}_n(t)}{dt}$$

Quadri-vecteur courant

$$J^\alpha(x) = \sum_n e_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{d{x_n}^\alpha(t)}{dt}, \text{ où } {x_n}^0(t) = t$$

Pour $\alpha = 0$, on a $J^0 = \varepsilon$.
Pour $\alpha = 1, 2, 3$, les J^α sont les coordonnées du vecteur $\mathbf{J}$.
J^α est un quadri-vecteur contravariant.

Démonstration

$$J^\alpha(x) = \int dt' \sum_n e_n \delta^4(x - x_n(t')) \frac{d{x_n}^\alpha(t')}{dt'}$$

Quitte à changer de variable d'intégration,
on peut supposer que t' est le temps propre :

$$J^\alpha(x) = \int d\tau \sum_n e_n \delta^4(x - x_n(\tau)) \frac{d{x_n}^\alpha(\tau)}{d\tau}$$

Or $d{x_n}^\alpha$ est un quadri-vecteur contravariant,
et $\delta^4(x - x_n(\tau))$ est un scalaire.

Conservation de la charge électrique

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} J^\alpha(x) = 0$$

loi Lorentz-invariante

Démonstration

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= \textstyle\sum_n e_n \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{d{x_n}^i(t)}{dt} \\
&= -\textstyle\sum_n e_n \frac{\partial}{\partial {x_n}^i} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{d{x_n}^i(t)}{dt} \\
&= -\textstyle\sum_n e_n \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \\
&= -\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(\mathbf{x}, t)
\end{aligned}$$

Distribution quelconque de charge

Pour tout vecteur contravariant J^α vérifiant

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} J^\alpha(x) = 0,$$

on peut définir une charge totale Q :

$$Q = \int d^3x\, J^0(x).$$

Q est constante : $\dfrac{dQ}{dt} = 0$.
Q est un scalaire.

Démonstration que Q est un scalaire

Soit θ la fonction échelon :

$$\theta(s) = \begin{cases} 1 \text{ si } s > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Alors $\theta' = \delta$.
On peut donc écrire : $Q = \int d^4x\, J^\alpha(x) \partial_\alpha \theta(n_\beta x^\beta)$,
avec $n_\beta = \begin{cases} 1 \text{ si } \beta = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
Notons Q' la charge totale calculée après transformée de Lorentz.

$$Q' - Q = \int d^4x\, \partial_\alpha \Big(J^\alpha(x) (\theta(n'_\beta x^\beta) - \theta(n_\beta x^\beta)) \Big)$$

où $n'_\beta = \Lambda^\gamma{}_\beta n_\gamma$.
Le théorème de Gauss permet de conclure.

Le champ électromagnétique

Le champ électromagnétique est un tenseur $F^{\alpha\beta}$ défini par :

$$F^{12} = B_3 \quad F^{23} = B_1 \quad F^{31} = B_2$$

$$F^{01} = E_1 \quad F^{02} = E_2 \quad F^{03} = E_3$$

$$F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$$

Alors

$$\left.\begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon \\ \nabla \times \mathbf{B} = \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \end{array}\right\} \iff \frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^{\alpha\beta} = -J^\beta$$

$$\left.\begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array}\right\} \iff \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\gamma\delta} = 0$$

La force électromagnétique sur une charge ponctuelle

Force exercée par le champ $F^{\alpha\beta}$ sur une charge e en x^α :

$$f^\alpha = e\, F^\alpha{}_\gamma \frac{dx^\gamma}{d\tau}$$

Démonstration

Référentiel où la charge est au repos :

$$\mathbf{f} = e\mathbf{E}, \quad f^0 = 0$$

Or f^α est un quadri-vecteur contravariant...

Force de Lorentz

On retrouve l'expression classique de la force de Lorentz :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Opérateurs différentiels en dimension 3

$$
\begin{array}{rl}
 & \text{champs scalaires} \\
\nabla\downarrow & \\
 & \text{champs de vecteurs} \\
\nabla\times\downarrow & \\
 & \text{champs de vecteurs} \\
\nabla\cdot\downarrow & \\
 & \text{champs scalaires}
\end{array}
$$

Operateurs différentiels en dimension 4

$$
\begin{array}{cccc}
\text{champs scalaires} & \phi & & \\
\downarrow & & & \\
\text{champs de vecteurs} & \dfrac{\partial\phi}{\partial x^\mu} & E_\mu & \\
\downarrow & & & \\
\text{tenseurs} & & \dfrac{\partial E_\mu}{\partial x^\nu} - \dfrac{\partial E_\nu}{\partial x^\mu} & F_{\mu\nu} \\
\downarrow & & & \\
\text{champs de vecteurs} & & & \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\dfrac{\partial F_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta}
\end{array}
$$

Théorème de Poincaré (degré 1, dimension 4)

Soit E_μ un vecteur covariant défini en tout point de l'espace-temps, tel que, pour tout μ, ν :

$$\frac{\partial E_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial E_\nu}{\partial x^\mu} = 0$$

Alors il existe un scalaire f tel que $E_\mu = \dfrac{\partial f}{\partial x^\mu}$.

Remarques

- En fait c'est une équivalence, l'autre implication est triviale.
- Théorème semblable en dimension 3.

Application

Un champ de force irrotationnel dérive d'un potentiel. En physique newtonienne, le champ gravitationnel est irrotationnel : le travail pour déplacer une masse est indépendant du chemin suivi.

Contre-exemple

Si E_μ n'est pas défini en tout point, ou au moins sur un "ouvert étoilé", ce théorème peut être en défaut, comme par exemple, en dimension 3, pour le champ suivant :

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Théorème de Poincaré (degré 2, dimension 3)

(même hypothèse sur le domaine de définition de $\mathbf{E}$)
On rappelle que $\nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}$.
Si $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, alors il existe un champ de vecteurs $\mathbf{F}$ tel que

$$\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Théorème de Poincaré (degré 2, dimension 4)

Si $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\dfrac{\partial F_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta} = 0$, alors il existe un champ de vecteurs A_γ tel que

$$F_{\gamma\delta} = \frac{\partial A_\delta}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial A_\gamma}{\partial x^\delta}$$

Application

Formules de Maxwell. A_γ est un potentiel vecteur,
mais un tel A_γ n'est pas unique. Pour tout scalaire ϕ,

$$\widetilde{A_\gamma} = A_\gamma + \frac{\partial \phi}{\partial x^\gamma}$$

convient encore.

Choix de jauge

On peut donc choisir ϕ de sorte que

$$\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial\left(A_\alpha + \dfrac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}\right)}{\partial x^\beta} = 0 \iff \Box^2\phi = -\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}$$

Alors $\eta^{\alpha\beta}\dfrac{\partial \widetilde{A_\alpha}}{\partial x^\beta} = 0$.

Que deviennent les équations de Maxwell ?

- La première $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\dfrac{\partial F_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta} = 0$ est automatiquement vérifiée.
- La seconde

$$\frac{\partial F^\alpha{}_\delta}{\partial x^\alpha} = -J_\delta \iff \Box^2 A_\delta - \frac{\partial^2 A^\alpha}{\partial x^\alpha \partial x^\delta} = -J_\delta$$

ces équations ne sont pas indépendantes

- 4 équations, 4 inconnues (les 4 coordonnées de A_δ)
- une relation : la forme de l'équation entraîne $\dfrac{\partial J^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$
- après le choix de jauge décrit plus haut $\eta^{\alpha\beta}\dfrac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} = 0$,
  les équations de Maxwell prennent la forme suivante
  et suffisent à déterminer A_δ :

$$\Box^2 A_\delta = -J_\delta$$

Finalement, les équations de Maxwell se résument à ces deux équations :

$$F_{\gamma\delta} = \frac{\partial A_\delta}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial A_\gamma}{\partial x^\delta}$$
$$\Box^2 A_\delta = -J_\delta$$

La seconde est une équation d'onde. À partir de là, on peut retrouver l'expression du champ électrique produit en un point par une charge en mouvement :

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{e'_r}{r'^2} + \frac{r'}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{e'_r}{r'^2}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}e'_r\right)$$

(cf. Feynman, *Électromagnétisme*, chapitre 21)

Rappel

Toute équation de la forme $\Box^2\phi = \ldots$ est une équation d'onde.
Le membre de droite décrit la source de l'onde.
Par exemple la propagation d'une onde dans le vide vérifie :

$$\Box^2\phi = 0 \iff \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\phi}{c^2\partial t^2} = 0$$

Les solutions de cette équation linéaire peuvent se décomposer en une superposition d'ondes planes.

Démonstration

Admis (on peut le faire par l'analyse de Fourier).
Vérifions seulement que toute onde plane se propageant dans la direction de l'axe des x à la vitesse de la lumière c est solution :

$$\phi(x, y, z) = f(x - ct)$$

$$\Box^2\phi = f''(x - ct) - \frac{(-c)^2 f''(x - ct)}{c^2} = 0$$

Tenseur énergie-impulsion

défini par analogie avec le quadri-vecteur courant,
pour chaque composante du quadri-vecteur impulsion

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n p_n^\alpha \frac{dx_n^\beta(t)}{dt}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \text{ où } x_n^0(t) = t$$

$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$

Démonstration : $T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n \frac{p_n^\alpha p_n^\beta}{E_n}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t))$

$T^{\alpha\beta}$ est un tenseur

Démonstration : $T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n \int d\tau\, p_n^\alpha \frac{dx_n^\beta}{d\tau}\delta^4(x - x_n(\tau))$

Loi de conservation de $T^{\alpha\beta}$

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}T^{\alpha\beta} = G^\alpha$$

où G^α est la densité de force définie par :

$$G^\alpha(\mathbf{x}, t) = \sum_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t))\frac{d\tau}{dt}f_n^\alpha(t)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^i}T^{\alpha i}(\mathbf{x}, t) &= -\sum_n p_n^\alpha(t)\frac{dx_n^i(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x_n^i}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \\
&= -\sum_n p_n^\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}T^{\alpha 0}(\mathbf{x}, t) + \sum_n \frac{dp_n^\alpha(t)}{dt}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t))
\end{aligned}$$

Particules dans un champ électromagnétique

Densité de force :

$$G^\alpha = \sum_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{d\tau}{dt} e_n F^\alpha{}_\gamma(x) \frac{dx_n^\gamma}{d\tau}$$

d'où :

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}(x) = F^\alpha{}_\gamma(x) J^\gamma(x)$$

Si l'on veut une loi de conservation, il faut donc ajouter un terme au tenseur énergie-impulsion.

On pose

$$T^{\alpha\beta} = \sum_n p_n^\alpha \frac{dx_n^\beta(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) + T_{\mathsf{em}}{}^{\alpha\beta}$$

où $T_{\mathsf{em}}{}^{\alpha\beta} = F^\alpha{}_\gamma F^{\beta\gamma} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta}$.

$T_{\mathsf{em}}{}^{\alpha\beta}$ est le tenseur énergie-impulsion électromagnétique.

équations de Maxwell $\Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial x^\beta} T_{\mathsf{em}}{}^{\alpha\beta} = -F^\alpha{}_\gamma J^\gamma$

Alors :

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} = G^\alpha - F^\alpha{}_\gamma J^\gamma = 0$$

$T_{\mathsf{em}}{}^{\alpha\beta}$ est un tenseur symétrique, et

$$T_{\mathsf{em}}{}^{00} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \qquad T_{\mathsf{em}}{}^{i0} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_i$$