Le principe d'équivalence

Erwan Penchèvre

24 mars 2015

Plan

$m_i = m_g \Rightarrow$ impossibilité de distinguer la force gravitationnelle d'une force d'inertie due à un changement de référentiel.

- Sont équivalents : un système qui subit une accélération constante par rapport aux étoiles fixes, et un autre au repos dans un champ gravitationnel uniforme.
- Sont équivalents : un système au repos par rapport aux étoiles fixes, et un autre en chute libre dans un champ gravitationnel uniforme.

système de particules

- une sorte d'ascenseur
- un observateur dans l'ascenseur
- des objets dans l'ascenseur (instruments de mesure, *etc.*)

(*cf.* Einstein 1916, *La théorie de la relativité restreinte et générale, Exposé élémentaire*, chapitre 20)

classiquement

Soit un système de particules en chute libre
dans un champ gravitationnel uniforme.

équations du mouvement dans un référentiel d'inertie

$$m_i \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = m_g \mathbf{g} + \sum_m \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m)$$

changement de référentiel → force d'inertie $(-m_i \mathbf{g})$.
$m_i = m_g$

équations du mouvement dans le référentiel ascenseur

$$m_i \frac{d^2\mathbf{x}'}{dt^2} = \sum_m \mathbf{F}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_m)$$

attention
Ce principe d'équivalence n'est vrai que pour un champ gravitationnel uniforme, c'est-à-dire $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}$ constant.

dans le champ gravitationnel terrestre
Les objets situés dans l'ascenseur, en chute libre avec l'ascenseur, se rapprocheront les uns des autres, car les lignes de champ convergent vers le centre de la Terre.

Hypothèse de continuité
Tout champ gravitationnel est, au voisinage de tout point de l'espace-temps, approximativement constant.

Sous l'hypothèse de continuité, le principe d'équivalence devient :

Principe d'équivalence
En tout point de l'espace-temps dans un champ gravitationnel quelconque, il existe un référentiel localement inertiel tel que, dans un voisinage infinitésimal du point en question, les lois de la nature prennent la même forme que dans un référentiel d'inertie en l'absence de gravitation.

Que sont les lois de la nature dans un référentiel d'inertie en l'absence de gravitation ?
les lois de la relativité restreinte

- Un référentiel localement inertiel en un point ne l'est pas toujours au voisinage d'un autre point.
- étudier tous les référentiels (et non plus seulement une classe de référentiels équivalents pour le groupe de Lorentz)
- calcul tensoriel : formules de changement de coordonnées ?

théorie des surfaces de Gauss / relativité générale

- en tout point il existe un système de coordonnées ξ^α localement euclidien / localement inertiel
- la géométrie intrinsèque / les effets de la gravitation peuvent être décrits au moyen des dérivées partielles $\dfrac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}$

Mouvement d'une masse ponctuelle dans un champ gravitationnel

dans un référentiel localement inertiel ξ^α

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0$$

où τ est le temps propre défini par

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

Quelles sont les équations du mouvement dans n'importe quel autre système de coordonnées x^μ ?

- repère cartésien en repos par rapport au laboratoire
- coordonnées curvilignes
- repère accéléré
- repère en rotation uniforme
- ...

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = 0$$

En dérivant et en isolant $\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2}$, on trouve :

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

où $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ est la connexion affine définie par :

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

Le temps propre est défini par

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}dx^\nu = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

où $g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique défini par :

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}$$

$g_{\mu\nu}$ et $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ déterminent le référentiel localement inertiel

multiplier $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ par $\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\lambda} \longrightarrow$ équations différentielles pour les ξ^α :

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}$$

solution au voisinage d'un point X, à l'ordre 2 en $(x - X)$:

$$\xi^\alpha(x) = a^\alpha + b^\alpha{}_\mu(x^\mu - X^\mu) + \frac{1}{2}b^\alpha{}_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x^\mu - X^\mu)(x^\nu - X^\nu) + \ldots$$

où

$$a^\alpha = \xi^\alpha(X), \qquad b^\alpha{}_\lambda = \frac{\partial \xi^\alpha(X)}{\partial X^\lambda}$$

Les $b^\alpha{}_\mu$ sont déterminés à une transformée de Lorentz près par :

$$\eta_{\alpha\beta}b^\alpha{}_\mu b^\beta{}_\nu = g_{\mu\nu}(X)$$

- $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu}$ déterminent au voisinage de chaque point la classe des référentiels localement inertiels
- le champ gravitationnel n'a aucun effet dans un référentiel localement inertiel

$\Rightarrow$ tous les effets de la gravitation sont « codés » dans $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu}$.

Précisons le Principe d'équivalence

Que signifie « localement » dans « référentiel localement inertiel » ?
On supposera que le référentiel localement inertiel ξ_X^α en un point X peut être choisi de sorte que les dérivées premières du tenseur métrique s'annulent en X.

$g_{\mu\nu}$ et ses dérivées déterminent $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$

$$\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right)$$

Le membre de droite de cette équation est parfois noté $\begin{Bmatrix} \sigma \\ \lambda\mu \end{Bmatrix}$ et s'appelle un symbole de Christoffel.

Démonstration

Notons $g^X_{\gamma\delta}(X')$ le tenseur métrique du référentiel ξ_X^α localement inertiel en X, calculé au point X'.
Notons $g_{\mu\nu}(X')$ le tenseur métrique d'un référentiel quelconque x^μ, calculé au point X'.
Les dérivées partielles de $g^X_{\gamma\delta}(X')$ par rapport aux X'^λ sont nulles en $X' = X$, donc

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}(X)}{\partial X^\lambda} = g^X_{\gamma\delta}(X) \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left[\frac{\partial \xi^\gamma_X(x)}{\partial x_\mu} \frac{\partial \xi^\delta_X(x)}{\partial x^\nu} \right] \right)_{x=X}$$

On trouve finalement, au point $x = X$:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\rho\mu}$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\rho\mu}$$

$$\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} = \Gamma^\rho_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} g_{\rho\lambda}$$

$$\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\rho\mu}$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = 2 g_{\rho\nu} \Gamma^\rho_{\lambda\mu}$$

Notons $g^{\nu\sigma}$ l'inverse de $g_{\rho\nu}$, c'est-à-dire $g^{\nu\sigma} g_{\rho\nu} = \delta^\sigma_\rho$. Alors :

$$\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right)$$

attention aux conditions initiales

Quand on résoud l'équation différentielle $\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$, il faut choisir des conditions initiales pour lesquelles τ est le temps propre, c'est-à-dire

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -1$$

Il suffit de le vérifier à l'instant initial, car l'équation du mouvement et la relation $\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \lambda\mu \end{Bmatrix}$ impliquent que

$$\frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) = 0$$

géodésiques

principe variationnel

Le temps propre $\int_A^B d\tau$ mis par une particule en chute libre pour aller d'un point A à un point B de l'espace-temps est minimal.

interprétation géométrique des équations du mouvement

Une particule en chute libre dans l'espace-temps de la relativité générale suit toujours le plus court chemin entre deux points quelconques de sa ligne d'univers, la « distance » étant mesurée par le temps propre.
Une telle ligne d'univers est appelée géodésique.

Démonstration

C'est une conséquence des équations du mouvement et de la relation $\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} = \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\}$.

Approximation classique

Masse ponctuelle de faible vitesse
+ champ gravitationnel faible et stationnaire

- $\dfrac{d\mathbf{x}}{d\tau} \ll \dfrac{dt}{d\tau}$ donc l'équation du mouvement devient :

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0$$

- $\dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0$ donc $\Gamma^\mu_{00} = -\dfrac{1}{2} g^{\mu\nu}\dfrac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}$
- champ faible $\Rightarrow g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ avec $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$
  donc $\Gamma^\mu_{00} \simeq -\dfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\dfrac{\partial h_{00}}{\partial x^\nu}$

En reportant Γ^μ_{00} dans l'équation du mouvement, on trouve :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dt}{d\tau}\right)^2 \nabla h_{00} \\ \dfrac{d^2t}{d\tau^2} = 0 \end{cases}$$

d'où $\dfrac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \dfrac{1}{2}\nabla h_{00}$.
Or, classiquement, $\dfrac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla\phi$ où $\phi = -\dfrac{GM}{r}$
donc $h_{00} = -2\phi$ et :

$$g_{00} = -(1 + 2\phi)$$

dans le système métrique

$$g_{00} = -\left(1 + 2\frac{\phi}{c^2}\right)$$

- à la surface d'un proton, $\dfrac{\phi}{c^2} \sim 10^{-39}$
- à la surface de la Terre, $\dfrac{\phi}{c^2} \sim 10^{-9}$
- à la surface du Soleil, $\dfrac{\phi}{c^2} \sim 10^{-6}$
- à la surface d'une étoile très massive $\dfrac{\phi}{c^2} \sim 10^{-4}$

la “courbure” de l'espace temps est plutôt faible !

Ralentissement des horloges

$\Delta t =$ intervalle de temps propre entre deux tic-tac,
dans un référentiel localement inertiel ξ^α au voisinage de l'horloge.

$$\Delta t = \sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta}$$

Dans un référentiel quelconque x^μ :

$$\Delta t = \sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu} = \sqrt{-g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu}$$

Horloge au repos $\Rightarrow \dfrac{dt}{\Delta t} = (-g_{00})^{-1/2}$

- Un observateur situé au voisinage de l'horloge ne pourra pas percevoir ce ralentissement car ses horloges de référence subiront le même ralentissement.
- Soit deux horloges au repos dans un champ stationnaire :

x_1

$$dt_1 = \frac{\Delta t}{\sqrt{-g_{00}(x_1)}}$$

x_2

$$dt_2 = \frac{\Delta t}{\sqrt{-g_{00}(x_2)}}$$

$dt_2 =$ intervalle de temps entre deux signaux
provenant de x_2, perçu en x_1.

$$\frac{\text{fréquence } \nu_2 \text{ des signaux}}{\text{fréquence } \nu_1 \text{ de l'horloge en } x_1} = \sqrt{\frac{g_{00}(x_2)}{g_{00}(x_1)}}$$

Cas d'un champ faible $g_{00} \simeq -1 - 2\phi$ avec $|\phi| \ll 1$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \phi(x_2) - \phi(x_1)$$

- x_1 : observateur terrestre
  x_2 : surface du Soleil
  $\phi(x_2) - \phi(x_1) \simeq -2.10^{-6}$
  Le résultat a pu être vérifié expérimentalement
  au moins à cette précision en observant le décalage
  vers le rouge du spectre émis par le bord
  (au centre, effet Doppler dû à des courants de convection...)
- x_1 : observateur terrestre
  x_2 : étoile *40 Eridani B*
  (même masse que le Soleil, mais rayon dix fois moindre)
  $\phi(x_2) - \phi(x_1) \simeq (-5,7 \pm 1) \times 10^{-5}$
  $\dfrac{\Delta\nu}{\nu} \simeq (-7 \pm 1) \times 10^{-5}$
  La masse d'une étoile est difficile à déterminer...
- Pound et Rebka (1960)
  x_2 : source de rayon γ en haut d'un immeuble de 22,60 m
  x_1 : observateur au rez-de-chaussée
  $\dfrac{\Delta\nu}{\nu} = \Delta\phi = \begin{cases} 2,46.10^{-15} \text{ (prédiction)} \\ (2,57 \pm 0,26).10^{-15} \text{ (expérience)} \end{cases}$

Signature d'une forme quadratique

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta} \iff g = D^t \eta D$$

où $D_{\alpha\mu} = \dfrac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}$, le référentiel ξ^α étant localement inertiel.
g est la matrice d'une forme quadratique $g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu$.
η est la matrice d'une forme quadratique
qui est en fait une somme de carrés :

$$\eta_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta = -(dx^0)^2 + \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2$$

Théorie des formes quadratiques

Pour toute forme quadratique g, il existe une matrice de changement de coordonnées D transformant g en une somme de carrés affectés des coefficients 1 ou (-1).

mais (Jacobi ∼ 1850) :

Soit s le nombre de carrés affectés d'un coefficient positif,
et t le nombre de carrés affectés d'un coefficient négatif ;
le couple (s,t), appelé signature de g, est un invariant
(il ne dépend que de g).

En tout point la métrique de l'espace-temps a pour signature $(3,1)$.

Conclusion

Newton

Les forces d'inertie sont dues à l'accélération par rapport à un espace absolu.

Mach

Les forces d'inertie sont dues à l'accélération par rapport aux étoiles (penser à l'expérience de Mach...).

Einstein

- Dans un référentiel localement inertiel, les forces d'inertie sont dues à l'accélération par rapport à ce référentiel.
- La classe des référentiels localement inertiels est déterminée par le champ gravitationnel local, lui-même causé par toutes les masses de l'Univers (y compris les étoiles).