Analyse tensorielle

Erwan Penchèvre

30 mars 2015

Plan

Principe méthodologique

2 voies possibles pour la théorie de la gravitation :

1) Écrire les équations de la relativité restreinte dans un référentiel localement inertiel ; puis changer de coordonnées
2) Trouver des équations dont la forme soit préservée par n'importe quel changement de coordonnées et qui soient vraies en l'absence de gravitation (c'est-à-dire quand le référentiel est inertiel)

Tenseurs

Scalaires

constante numérique, 0, $d\tau$, champ scalaire

Vecteurs contravariants

$$V'^{\mu} = V^{\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \qquad \text{(par exemple } dx^{\mu}\text{)}$$

Vecteurs covariants

$$U'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} U_{\nu} \qquad \text{(par exemple } \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} \text{ si } \phi \text{ est scalaire)}$$

Tenseurs contravariants, covariants ou mixtes

Exemple : $T'^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} T^{\kappa}{}_{\rho}{}^{\sigma}$

Exercice
Vérifier que $g_{\mu\nu}$ est bien un tenseur covariant, et que $d\tau$ est bien un scalaire.

L'inverse du tenseur métrique
Soit $g^{\lambda\kappa}$ l'inverse du tenseur métrique, $g^{\lambda\mu}g_{\mu\nu} = \delta^{\lambda}{}_{\nu}$.
$g^{\lambda\kappa}$ est un tenseur contravariant :

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} g^{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\gamma\delta} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\nu}} \delta^{\gamma}{}_{\beta} g^{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} = \delta^{\lambda}{}_{\nu}$$

Le symbole de Kronecker
$\delta^{\alpha}{}_{\beta}$ est un tenseur mixte ; c'est le seul tenseur ayant mêmes coordonnées dans tous les référentiels :

$$\delta'^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} \delta^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}$$

Algèbre tensorielle

Combinaisons linéaires
Une combinaison linéaire de tenseurs avec les mêmes indices est un tenseur.

Produits directs
Soit $A^{\alpha}{}_{\beta}$ et B^{γ} des tenseurs, alors $T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma} = A^{\alpha}{}_{\beta}B^{\gamma}$ est un tenseur.

Contraction
Si $T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma\delta}$ est un tenseur, alors $T^{\alpha\gamma} = T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma\beta}$ est un tenseur.

Attention

- en général, si $T^{\beta\gamma}$ est un tenseur, $\dfrac{\partial T^{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}}$ n'est pas un tenseur.
- $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ n'est pas un tenseur.

Comment transformer un tenseur covariant en un tenseur contravariant, et inversement ?

- Soit $T^{\mu\rho}{}_{\sigma}$ un tenseur, contravariant en μ.
  $S_{\nu}{}^{\rho}{}_{\sigma} = g_{\mu\nu}T^{\mu\rho}{}_{\sigma}$ est covariant en ν.
- Inversement, soit $S_{\nu}{}^{\rho}{}_{\sigma}$ un tenseur covariant en ν,
  alors $g^{\mu\nu}S_{\nu}{}^{\rho}{}_{\sigma}$ est contravariant en μ.
- $g^{\mu\nu}g_{\lambda\nu}T^{\lambda\rho}{}_{\sigma} = T^{\mu\rho}{}_{\sigma}$

Il y a donc 2^N manières différentes d'écrire un tenseur à N indices.

Exemple
Le tenseur métrique : $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$, $\delta^{\mu}{}_{\nu}$, $\delta_{\mu}{}^{\nu}$.

Pseudo-tenseurs

Exemple
pseudo-tenseur $T^{\mu}{}_{\nu}$ de poids W

$$T'^{\mu}{}_{\nu} = \left(\det\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^{W} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\nu}} T^{\lambda}{}_{\kappa}$$

où $\det\dfrac{\partial x'}{\partial x}$ est le jacobien, déterminant de la matrice des dérivées partielles.

- Le déterminant du tenseur métrique $g = -\det g_{\mu\nu}$ est un pseudo-tenseur de poids (-2).
- Le poids d'un produit direct de pseudo-tenseurs est la somme des poids des pseudo-tenseurs.
- (pseudo-tenseur de poids W) $\times\, g^{W/2}$ = tenseur

- Une combinaison linéaire de pseudo-tenseurs de poids W est un pseudo-tenseur de poids W.
- La contraction d'un pseudo-tenseur de poids W est un pseudo-tenseur de poids W.
- L'élément d'hypervolume infinitésimal d^4x est une sorte de pseudo-tenseur :

$$d^4x' = \left|\det \frac{\partial x'}{\partial x}\right| .d^4x$$

donc $\sqrt{g}.d^4x$ est invariant.
- Le symbole de Levi-Civita est un pseudo-tenseur de poids (-1)

Symbole de Levi-Civita

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} = \begin{cases} +1 \text{ si } \mu\nu\lambda\kappa \text{ est une permutation paire de } 0123 \\ -1 \text{ si c'est une permutation impaire} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^{\kappa}}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} = \left(\det \frac{\partial x'}{\partial x}\right)\varepsilon^{\rho\sigma\eta\xi}$$

Symbole de Levi-Civita covariant

$$\varepsilon_{\rho\sigma\eta\xi} = g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu}g_{\eta\lambda}g_{\xi\kappa}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}$$

Exercice

Montrez que $\varepsilon_{\rho\sigma\eta\xi} = -g\varepsilon^{\rho\sigma\eta\xi}$.

Connexion affine et changement de coordonnées

$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}}\frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}$ n'est pas un tenseur :

$$\begin{aligned}\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}}\frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}} \\ &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}}\right) \\ &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}}\left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\tau}\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}}\right)\end{aligned}$$

Le terme de gauche donne $\Gamma^{\rho}_{\tau\sigma}$, donc :

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}$$

Le terme de gauche, c'est comme si $\Gamma^{\rho}_{\tau\sigma}$ était un tenseur :

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}$$

Le terme de droite peut aussi s'écrire ainsi :

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\sigma}}$$

Démonstration

Dériver $\delta^{\lambda}{}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}}$ par rapport à x'^{μ}...

Application

Mouvement d'une masse ponctuelle dans un champ gravitationnel.

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0, \qquad d\tau^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

Nouvelle démonstration

- Ces deux équations sont vraies en l'absence de gravitation car alors $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = 0$ et $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.
- Comment se transforme la première équation sous l'effet d'un changement de coordonnées ?

$$\frac{d^2x'^\mu}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

mais :

$$\Gamma'^\mu_{\nu\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda}\Gamma^\rho_{\tau\sigma} - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}$$

donc :

$$\frac{d^2x'^\mu}{d\tau^2} + \Gamma'^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx'^\nu}{d\tau}\frac{dx'^\lambda}{d\tau} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa}\left(\frac{d^2x^\kappa}{d\tau^2} + \Gamma^\kappa_{\sigma\rho}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau}\right)$$

L'équation du mouvement est covariante.

La dérivée covariante

Définition

$$V^\mu{}_{;\lambda} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\kappa}V^\kappa$$

$V^\mu{}_{;\lambda}$ est un tenseur.

Démonstration

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x'^\lambda}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}V^\nu\right) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda}V^\nu$$

$$\Gamma'^\mu_{\lambda\kappa}V'^\kappa = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda}\Gamma^\nu_{\rho\sigma}V^\sigma - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda}V^\sigma$$

Définition

$$V_{\mu;\nu} = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}V_\lambda$$

$V_{\mu;\nu}$ est un tenseur.

Démonstration

$$\frac{\partial V'_\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial V_\rho}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}V_\rho$$

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu}V'_\lambda = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\Gamma^\kappa_{\rho\sigma}V_\kappa + \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}V_\kappa$$

Dérivée covariante d'un tenseur quelconque

Exemple :

$$T^{\mu\sigma}{}_{\lambda;\rho} = \frac{\partial T^{\mu\sigma}{}_{\lambda}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} T^{\nu\sigma}{}_{\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\rho\nu} T^{\mu\nu}{}_{\lambda} - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\rho} T^{\mu\sigma}{}_{\kappa}$$

Dérivée covariante d'un pseudo-tenseur de poids W

Exemple :

$$\begin{aligned} T^{\mu}{}_{\lambda;\rho} &= g^{-W/2} \left(g^{W/2} T^{\mu}{}_{\lambda} \right)_{;\rho} \\ &= \frac{\partial T^{\mu}{}_{\lambda}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} T^{\nu}{}_{\lambda} - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\rho} T^{\mu}{}_{\kappa} + \frac{W}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^{\rho}} T^{\mu}{}_{\lambda} \end{aligned}$$

Remarque

Dans un repère localement inertiel,

dérivée covariante = dérivée

Dérivée covariante et opérations algébriques

$$(\alpha A^{\mu}{}_{\nu} + \beta B^{\mu}{}_{\nu})_{;\lambda} = \alpha A^{\mu}{}_{\nu;\lambda} + \beta B^{\mu}{}_{\nu;\lambda}$$

$$\left(A^{\mu}{}_{\nu} B^{\lambda} \right)_{;\rho} = A^{\mu}{}_{\nu;\rho} B^{\lambda} + A^{\mu}{}_{\nu} B^{\lambda}{}_{;\rho}$$

$$T^{\mu\lambda}{}_{\lambda;\rho} = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} T^{\mu\lambda}{}_{\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} T^{\nu\lambda}{}_{\lambda}$$

- $g_{\mu\nu;\lambda} = 0$
  Démonstration : $g_{\mu\nu;\lambda} = \dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} g_{\rho\mu}$,
  or tout ceci s'évanouit dans un référentiel localement inertiel...
- De même : $g^{\mu\nu}{}_{;\lambda} = 0$, et $\delta^{\mu}{}_{\nu;\lambda} = 0$.
- Corollaire :

$$(g^{\mu\nu} V_{\nu})_{;\lambda} = g^{\mu\nu} V_{\nu;\lambda}$$

Gradient, rotationnel, divergence

- gradient d'un scalaire

$$S_{;\mu} = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}$$

- rotationnel d'un vecteur covariant

$$\begin{aligned} V_{\mu;\nu} - V_{\nu;\mu} &= \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V_\lambda - \frac{\partial V_\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} V_\lambda \\ &= \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial V_\nu}{\partial x^\mu} \end{aligned}$$

- divergence d'un vecteur contravariant

$$V^\mu{}_{;\mu} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} V^\lambda$$

Lemme

Soit M une matrice quelconque.

$$\mathrm{Tr}\left(M^{-1}\frac{\partial M}{\partial x^\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}(\ln(\det M))$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \delta \ln(\det M) &= \ln(\det M^{-1}(M + \delta M)) \\ &= \ln(\det(I + M^{-1}\delta M)) \\ &\simeq \ln(1 + \mathrm{Tr}(M^{-1}\delta M)) \\ &\simeq \mathrm{Tr}(M^{-1}\delta M) \end{aligned}$$

Proposition

$$V^\mu{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}V^\mu)}{\partial x^\mu}$$

Démonstration : appliquer le lemme à $\Gamma^\mu_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\lambda}$.

Corollaire

Si V^μ s'annule à l'infini, alors $\int d^4x\,\sqrt{g}\,V^\mu{}_{;\mu} = 0$.

Démonstration : théorème de Gauss.

Proposition

Si $T^{\mu\lambda} = -T^{\lambda\mu}$, alors $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}T^{\mu\nu})}{\partial x^\mu}$.

Démonstration : exercice.

Proposition

Si $T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$, alors :

$$T_{\mu\nu;\lambda} + T_{\lambda\mu;\nu} + T_{\nu\lambda;\mu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial T_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial T_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}$$

Démonstration

Écrire chacune des dérivées covariantes.
Par exemple :

$$T_{\mu\nu;\lambda} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} T_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} T_{\mu\rho}$$

Les termes en rouge se compensent mutuellement dans la somme des trois dérivées covariantes.

Dérivée covariante le long d'une courbe

tenseur défini en tout point de l'espace-temps (champ)
$\neq$ tenseur défini seulement le long d'une courbe
(exemple : quadri-vecteur impulsion)

Définition

$$\frac{DA^{\mu}}{D\tau} = \frac{dA^{\mu}}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\frac{dx^{\lambda}}{d\tau}A^{\nu}$$

Proposition

$\dfrac{DA^{\mu}}{D\tau}$ est un quadri-vecteur contravariant.

Démonstration

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}A^{\nu}$$

$$\frac{dA'^{\mu}}{d\tau} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{dA^{\nu}}{d\tau} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}}\frac{dx^{\lambda}}{d\tau}A^{\nu}$$

$$\Gamma'^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda}}\Gamma^{\kappa}_{\rho\sigma} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\sigma}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda}}$$

$$\Gamma'^{\mu}_{\nu\lambda}\frac{dx'^{\lambda}}{d\tau}A'^{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\kappa}}\Gamma^{\kappa}_{\rho\sigma}\frac{dx^{\sigma}}{d\tau}A^{\rho} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\sigma}}\frac{dx^{\sigma}}{d\tau}A^{\rho}$$

$$\frac{dA'^{\mu}}{d\tau} + \Gamma'^{\mu}_{\nu\lambda}\frac{dx'^{\lambda}}{d\tau}A'^{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\kappa}}\left(\frac{dA^{\kappa}}{d\tau} + \Gamma^{\kappa}_{\rho\sigma}\frac{dx^{\sigma}}{d\tau}A^{\rho}\right)$$

Pour un tenseur quelconque défini le long d'une courbe

(exemple)

$$\frac{DT^{\mu}{}_{\nu}}{D\tau} = \frac{dT^{\mu}{}_{\nu}}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\rho}\frac{dx^{\lambda}}{d\tau}T^{\rho}{}_{\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\frac{dx^{\lambda}}{d\tau}T^{\mu}{}_{\sigma}$$

Remarque

Si $T^{\mu}{}_{\nu}$ est un champ, alors

$$\frac{DT^{\mu}{}_{\nu}}{D\tau} = T^{\mu}{}_{\nu;\lambda}\frac{dx^{\lambda}}{d\tau}$$

(cette équation permet de retrouver, formellement, l'expression ci-dessus, même quand $T^{\mu}{}_{\nu}$ n'est défini que le long d'une courbe...)

Transport parallèle d'un quadri-vecteur

Hypothèse :

dans le référentiel localement inertiel mobile $\xi_{x(\tau)}$, on a $\dfrac{dA^{\mu}}{d\tau} = 0$.
(exemple : quadri-vecteur impulsion d'une particule dans un champ purement gravitationnel)
Alors :

$$\frac{DA^{\mu}}{D\tau} = 0$$

équation covariante $\Rightarrow$ elle est vraie dans un référentiel quelconque