Effets de la gravitation sur les lois de conservation et sur les lois de l'électrodynamique

Erwan Penchèvre

30 mars 2015

Plan

Loi d'inertie

U^α quadri-vitesse d'une particule libre

Relativité restreinte

$$\begin{cases} U^\alpha = \dfrac{d\xi^\alpha}{d\tau} \\ \dfrac{dU^\alpha}{d\tau} = 0 \end{cases}$$

Relativité générale

$$\begin{cases} U^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{d\tau} \text{ est un quadri-vecteur} \\ \dfrac{dU^\alpha}{d\tau} \text{ n'est pas un quadri-vecteur} \end{cases}$$

Si la particule n'est soumise à aucune autre force que la gravitation, alors :

$$\frac{DU^\mu}{D\tau} = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} U^\nu U^\lambda = 0$$

Démonstration

Dans un référentiel localement inertiel $\dfrac{DU^\mu}{D\tau} = \dfrac{dU^\mu}{d\tau} = 0$, or l'équation $\dfrac{DU^\mu}{D\tau} = 0$ est covariante.

Si la particule est soumise à une force résultante f^μ,

$$\frac{DU^\mu}{D\tau} = \frac{f^\mu}{m}$$

c'est-à-dire

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = f^\mu \underbrace{- m\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau}}_{\text{ceci joue le rôle de la ``force gravitationnelle''}}$$

Équations de Maxwell

Relativité restreinte

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = -J^\beta \\ \dfrac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \dfrac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \dfrac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = 0 \end{cases}$$

Relativité générale

$$\begin{cases} F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = -J^\nu \\ F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\lambda\mu;\nu} + F_{\nu\lambda;\mu} = 0 \end{cases}$$

où $F_{\lambda\kappa} = g_{\lambda\mu}g_{\kappa\nu}F^{\mu\nu}$, et $F^{\mu\nu} = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\dfrac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\beta}\widetilde{F}^{\alpha\beta}$
avec $\widetilde{F}^{12} = B_3$, $\widetilde{F}^{0i} = E_i$, $\widetilde{F}^{\alpha\beta} = -\widetilde{F}^{\beta\alpha}$.

$F^{\mu\nu}$ et $F_{\mu\nu}$ sont antisymétriques.
Les résultats du chapitre précédent sur la divergence permettent donc de récrire les équations de Maxwell sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\sqrt{g}F^{\mu\nu})}{\partial x^\mu} = -\sqrt{g}J^\nu \\ \dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} = 0 \end{cases}$$

Force de Lorentz

Relativité restreinte

$$f^\mu = eF^\mu{}_\nu\frac{dx^\nu}{d\tau} \quad \text{où } F^\mu{}_\nu = \eta_{\nu\lambda}F^{\mu\lambda}$$

Relativité générale

$$f^\mu = eF^\mu{}_\nu\frac{dx^\nu}{d\tau} \quad \text{où } F^\mu{}_\nu = g_{\nu\lambda}F^{\mu\lambda}$$

Conservation de la charge

Relativité restreinte

$$J^\alpha(x) = \int d\tau \sum_n e_n \delta^4(x - x_n(\tau)) \frac{dx_n^\alpha}{d\tau}$$

$$\frac{\partial J^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$$

Attention : $\delta^4(x - x_n(\tau))$ est un scalaire pour les transformations de Lorentz, mais pas pour des transformations générales.

Conservation de la charge en relativité générale ?

$\delta^4(x-y)$ est défini par :

$$\phi(y) = \int d^4x \, \phi(x) \, \delta^4(x-y) = \int \sqrt{g} \, d^4x \, \phi(x) \frac{1}{\sqrt{g}} \delta^4(x-y)$$

où $\sqrt{g} \, d^4x$ est un scalaire.

Donc $\frac{1}{\sqrt{g}} \delta^4(x-y)$ est un scalaire.

En relativité générale, on définit donc le quadri-vecteur courant d'un système de charges ponctuelles par :

$$J^\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{g}} \int d\tau \sum e_n \delta^4(x - x_n(\tau)) \frac{dx_n^\mu}{d\tau}$$

Loi de conservation :

$$J^\mu{}_{;\mu} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial(\sqrt{g}\, J^\mu)}{\partial x^\mu} = 0$$

Tenseur énergie-impulsion

Relativité restreinte

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = G^\beta$$

Relativité générale

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = G^\nu$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, T^{\mu\nu})}{\partial x^\mu} = G^\nu - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} T^{\mu\lambda}$$

En l'absence de gravitation, l'équation $\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = 0$ décrit la conservation de l'énergie.

Dans un champ gravitationnel, l'équation $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$ décrit l'échange d'énergie entre la matière (masse + énergie cinétique) et le champ.

Tenseur énergie-impulsion électromagnétique

Relativité restreinte

$$T^{\alpha\beta} = F^{\alpha}{}_{\gamma} F^{\beta\gamma} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta}$$

Relativité générale

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu}{}_{\lambda} F^{\nu\lambda} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\lambda\kappa} F^{\lambda\kappa}$$

Tenseur énergie-impulsion d'un système de masses ponctuelles isolé

Relativité restreinte

$$T^{\alpha\beta} = \sum m_n \int d\tau \, \frac{dx_n^\alpha}{d\tau} \frac{dx_n^\beta}{d\tau} \, \delta^4(x - x_n(\tau))$$

Relativité générale

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum m_n \int d\tau \, \frac{dx_n^\mu}{d\tau} \frac{dx_n^\nu}{d\tau} \, \delta^4(x - x_n(\tau))$$

Attention

$$\int T^{\mu 0} \sqrt{g} \; d^3x = \sum_n m_n \frac{dx_n^\mu}{d\tau}$$

où $m_n \dfrac{dx_n^\mu}{d\tau}$ est le quadri-vecteur impulsion de la n-ième masse, donc $T^{\mu 0}\sqrt{g}$ est une sorte de densité spatiale d'énergie-impulsion. L'intégrale ci-dessus est l'énergie-impulsion totale du système de masses ponctuelles ; mais cette quantité n'est pas conservée car

$$\frac{\partial (T^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x^\nu} = -\sqrt{g}\,\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} T^{\mu\lambda} \neq 0 \text{ en général}$$

(il y a échange d'énergie-impulsion entre la matière et la graviation)