La courbure

Erwan Penchèvre

30 mars 2015

- On connaît maintenant l'effet d'un champ gravitationnel sur la matière et sur les lois de l'électrodynamique.
- Comment la matière crée-t-elle un champ gravitationnel ?

Autrement dit : comment la matière influence-t-elle la structure métrique de l'espace-temps ?

Analogie :

les équations de Maxwell, équations différentielles décrivant le champ électromagnétique $F^{\alpha\beta}$ en fonction de J^{α}.

Quelles sont les équations différentielles reliant la structure de l'espace-temps au tenseur énergie-impulsion $T^{\alpha\beta}$ de la matière ?

Plan

Le tenseur de courbure

Problème

On cherche un tenseur qui soit lié à la structure de l'espace-temps.
Il doit dépendre de $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivées.

Remarque

Tout tenseur ne dépendant que de $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivées premières ne dépend, en fait, que de $g_{\mu\nu}$.

Démonstration

Dans un référentiel localement inertiel, $\dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = 0...$

Pour construire de nouveaux tenseurs,
il faut regarder les dérivées secondes de $g_{\mu\nu}$
(ou bien les dérivées premières de $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$).

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\tau}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\Gamma'^\tau_{\rho\sigma} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\tau}\frac{\partial^2 x'^\tau}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

On isole $\dfrac{\partial^2 x'^\tau}{\partial x^\mu\partial x^\nu}$:

$$\frac{\partial^2 x'^\tau}{\partial x^\mu\partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\Gamma'^\tau_{\rho\sigma}$$

On dérive par rapport à x^κ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^\kappa \partial x^\mu\partial x^\nu} &= \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\left(\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\eta}\Gamma^\eta_{\kappa\lambda} - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda}\Gamma'^\tau_{\rho\sigma}\right)\\ &-\Gamma'^\tau_{\rho\sigma}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\eta}\Gamma^\eta_{\kappa\nu} - \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\nu}\Gamma'^\sigma_{\eta\xi}\right)\\ &-\Gamma'^\tau_{\rho\sigma}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\eta}\Gamma^\eta_{\kappa\mu} - \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\mu}\Gamma'^\rho_{\eta\xi}\right)\\ &+\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda}\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa}\frac{\partial \Gamma'^\tau_{\rho\sigma}}{\partial x'^\eta}\end{aligned}$$

Commutativité des dérivées partielles :

$$\frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^\kappa\partial x^\mu\partial x^\nu} - \frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^\nu\partial x^\mu\partial x^\kappa} = 0$$

$$\begin{aligned}\iff\quad &\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa}\Gamma^\lambda_{\nu\eta}\right)\\ &-\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa}\left(\frac{\partial \Gamma'^\tau_{\rho\sigma}}{\partial x'^\eta} - \frac{\partial \Gamma'^\tau_{\rho\eta}}{\partial x'^\sigma} - \Gamma'^\tau_{\lambda\sigma}\Gamma'^\lambda_{\eta\rho} + \Gamma'^\tau_{\lambda\eta}\Gamma'^\lambda_{\sigma\rho}\right) = 0\end{aligned}$$

$$\iff\quad \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda}R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa}R'^\tau{}_{\rho\sigma\eta} = 0$$

$$\iff\quad R'^\tau{}_{\rho\sigma\eta} = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\eta}R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa}$$

Définition

le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel :

$$R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa}\Gamma^\lambda_{\nu\eta}$$

Unicité du tenseur de courbure

Proposition

$R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa}$ est l'unique tenseur constructible à partir de $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivées premières et secondes, et linéaire en les dérivées secondes.

Démonstration

Soit un tel tenseur.
$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = 0 \;\Rightarrow$ le tenseur est fonction linéaire des dérivées secondes.
Étudions donc la forme que doit avoir ce tenseur dans un référentiel où $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$, en un point donné.
Il doit être fonction linéaire des $\dfrac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}$.

Soit x' un autre référentiel tel qu'on ait aussi $\Gamma'^{\tau}_{\rho\sigma} = 0$.

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma'^{\tau}_{\rho\sigma} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}$$

donc tous les référentiels x' tels que $\Gamma'^{\tau}_{\rho\sigma} = 0$ s'obtiennent à partir du référentiel x avec les changements de coordonnées $x \to x'$ tels que :

$$\frac{\partial^2 x^{\tau}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = 0$$

Les dérivées troisièmes $\dfrac{\partial^3 x'^{\tau}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}$ peuvent prendre des valeurs arbitraires au point en question.

Pour un tel référentiel, l'expression des dérivées troisièmes vue plus haut montre que :

$$\frac{\partial \Gamma'^{\tau}_{\rho\sigma}}{\partial x'^{\eta}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial^3 x'^{\tau}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}$$

Pour construire un tenseur, il faut choisir une combinaison linéaire des $\dfrac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}}$ pour laquelle les termes rouges se compensent et disparaissent.

On n'a pas le choix !

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}}$$

Dans un référentiel où $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$ on a donc $T^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa} = R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa}$.
Équation entre tenseurs $\Rightarrow$ elle est vraie dans tout référentiel.

Remarque

On peut certes construire d'autres tenseurs par combinaison linéaire des $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa}$:

- le tenseur de Ricci $R_{\mu\kappa} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\kappa}$
- le scalaire de courbure $R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}$

Transport parallèle d'un vecteur le long d'une boucle

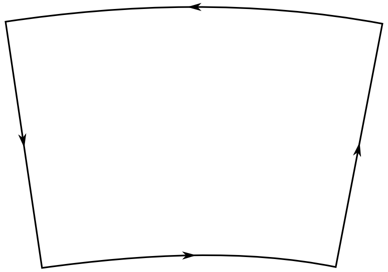
Comment mesurer les effets de la courbure de l'espace-temps ?

Analogie :

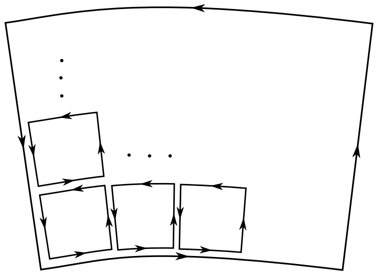
quand on transporte parallèlement un vecteur le long d'une boucle sur une surface courbe, on ne retrouve pas toujours la valeur initiale après un circuit complet.

Équation du transport parallèle d'un vecteur S_{μ} :

$$\frac{dS_{\mu}}{d\tau} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} S_{\lambda}$$



ΔS_μ



$\Delta S_\mu = \sum_N \Delta_N S_\mu$

le long d'une boucle infinitésimale, $\Delta S_\mu = \ldots ?$

À l'ordre 1 en $x^\mu - X^\mu$, au point $X = x(\tau_0)$:

$$S_\mu(\tau) = S_\mu(\tau_0) + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X)(x^\nu(\tau) - X^\nu)S_\lambda(\tau_0) + \ldots$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x) = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X) + (x^\rho - X^\rho)\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}(X) + \ldots$$

d'où :

$$S_\mu(\tau) = S_\mu(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{dS_\mu}{d\tau}\, d\tau$$
$$= S_\mu(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X) + (x^\rho(\tau) - X^\rho)\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}(X)\right)\left(S_\lambda(\tau_0) + \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}(X)(x^\rho(\tau) - X^\rho)S_\sigma(\tau_0)\right)\frac{dx^\nu}{d\tau}\, d\tau$$

Le long d'une boucle, si $x^\mu(\tau_1) = x^\mu(\tau_0)$,

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{dx^\nu}{d\tau}\, d\tau = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta S_\mu &= S_\mu(\tau_1) - S_\mu(\tau_0)\\ &= \left(\frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}(X) + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X)\Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho}(X)\right) S_\sigma(\tau_0)\int_{\tau_0}^{\tau_1} x^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau}\, d\tau\end{aligned}$$

Intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{\tau_0}^{\tau_1} x^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau}\, d\tau &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d}{d\tau}(x^\rho x^\nu)\, d\tau - \int_{\tau_0}^{\tau_1} x^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau}\, d\tau\\ &= -\int_{\tau_0}^{\tau_1} x^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau}\, d\tau\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\Delta S_\mu &= \left(\frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho}\right) S_\sigma(\tau_0) \times \frac{1}{2}\left(\int_{\tau_0}^{\tau_1} x^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau}\, d\tau - \int_{\tau_0}^{\tau_1} x^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau}\, d\tau\right)\\ &= \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\right)}_{R^{\sigma}{}_{\mu\nu\rho}} S_\sigma(\tau_0)\int x^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau}\, d\tau\end{aligned}$$

donc le long d'une surface où $R^{\sigma}{}_{\mu\nu\rho} = 0$, on a $\Delta S_\mu = 0$

Corollaire 1

Dans une région de l'espace-temps où $R^\sigma{}_{\mu\nu\rho} = 0$, la valeur d'un vecteur transporté parallèlement est indépendante du chemin suivi.

Corollaire 2

Dans une région de l'espace-temps où $R^\sigma{}_{\mu\nu\rho} = 0$,
à partir d'un vecteur défini en un point X donné,
on peut, par transport parallèle, définir un champ $S_\mu(x)$ vérifiant :

$$\frac{DS_\mu}{D\tau} = 0,$$

le long de n'importe quelle trajectoire partant du point X.
Alors, en tout point :

$$S_{\mu;\nu} = 0$$

Gravitation ou coordonnées curvilignes ?

Soit un espace-temps muni d'une métrique $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$.
Comment savoir s'il y a vraiment un champ gravitationnel ?
(peut-être existe-t-il un changement de coordonnées $x \to x'$ tel que $g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ globalement...)

Exemple

$$(r, \theta, \phi, t)$$

$$g_{rr} = 1, \qquad g_{\theta\theta} = r^2, \qquad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta, \qquad g_{tt} = -1$$

Théorème

Il existe un changement de coordonnées $x \to x'$ tel que $g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ si et seulement si $R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} = 0$ partout.

Démonstration

$(g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}) \Rightarrow (R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} = 0)$: évident.
$(R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} = 0) \Rightarrow (g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu})$?
Soit un point X. Il existe un référentiel localement inertiel en X :

$$\eta^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}(X) d^\alpha{}_\mu d^\beta{}_\nu$$

On définit quatre vecteurs covariants $D^0{}_\mu, D^1{}_\mu, D^2{}_\mu, D^3{}_\mu$ comme solutions des équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D^\alpha{}_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} D^\alpha{}_\lambda = 0 \\ D^\alpha{}_\mu(X) = d^\alpha{}_\mu \end{cases}$$

(cf. corollaire 2 de l'équation du transport parallèle).

Ces solutions vérifient

$$\frac{\partial D^\alpha{}_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial D^\alpha{}_\nu}{\partial x^\mu} = 0,$$

donc chaque D^α est le gradient d'un scalaire (Poincaré) :

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} = D^\alpha{}_\mu.$$

On vérifie qu'on a alors, partout :

$$\eta^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} D^\alpha{}_\mu D^\beta{}_\nu$$

car $(g^{\mu\nu} D^\alpha{}_\mu D^\beta{}_\nu)_{;\rho} = 0$.

Commutateur de deux dérivées covariantes

La dérivée covariante $V_{\mu;\nu}$ est un tenseur covariant en μ et en ν.
On peut donc définir une dérivée covariante seconde $V_{\mu;\nu;\kappa}$:

$$V_{\mu;\nu;\kappa} = \frac{\partial V_{\mu;\nu}}{\partial x^\kappa} - \Gamma^\lambda_{\nu\kappa} V_{\mu;\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\kappa} V_{\lambda;\nu}$$

Exercice

Montrer que $V_{\mu;\nu;\kappa} - V_{\mu;\kappa;\nu} = -V_\sigma R^\sigma{}_{\mu\nu\kappa}$
et que $V^\lambda{}_{;\nu;\kappa} - V^\lambda{}_{;\kappa;\nu} = V^\sigma R^\lambda{}_{\sigma\nu\kappa}$.

Propriétés algébriques de $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\sigma} R^\sigma{}_{\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\sigma}\left(\frac{\partial\Gamma^\sigma_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial\Gamma^\sigma_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa}\Gamma^\sigma_{\nu\eta}\right)$$

Dans les termes en rouge, écrivons les $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ en fonction de $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivées, puis écrivons toutes les dérivées premières de $g_{\mu\nu}$ en fonction des $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$. Après simplification, on obtient :

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}\right) + g_{\eta\sigma}(\Gamma^\eta_{\nu\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\kappa} - \Gamma^\eta_{\kappa\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\nu})$$

Proposition

- $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}$
- $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\lambda\kappa\nu}$
- $R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0$

Corollaire

- Le tenseur de Ricci $R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ est symétrique.
- $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0$.

Remarque

En utilisant la proposition, on voit qu'il n'y a, au signe près, qu'une seule manière de contracter deux indices de $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$: il y a unicité du tenseur de Ricci.
De même pour le scalaire de courbure $R = g^{\lambda\nu} g^{\mu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa}$.

Identités de Bianchi

Proposition

- $R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0$
- $\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right)_{;\mu} = 0$

Démonstration

exercice