Les équations de champ d'Einstein

Erwan Penchèvre

30 mars 2015

Plan

Rappel : l'équation de Poisson (physique newtonienne)

Quel est le champ gravitationnel engendré par un milieu continu de densité ρ ?
Au point (X, Y, Z), le vecteur champ est obtenu en intégrant la contribution de chaque élément de volume sur tout l'espace :

$$E_x(X,Y,Z) = \int \frac{G\rho\, dx\, dy\, dz\, (x-X)}{((x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2)^{3/2}}$$

$$E_y(X,Y,Z) = \int \frac{G\rho\, dx\, dy\, dz\, (y-Y)}{((x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2)^{3/2}}$$

$$E_z(X,Y,Z) = \int \frac{G\rho\, dx\, dy\, dz\, (z-Z)}{((x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2)^{3/2}}$$

Calculons la divergence du champ gravitationnel :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial X} + \frac{\partial E_y}{\partial Y} + \frac{\partial E_z}{\partial Z}$$

L'équation de Poisson

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi G\rho$$

Démonstration

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \int G\rho \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{X}}{|\mathbf{x}-\mathbf{X}|^3}\right) dx\, dy\, dz$$

Il faut montrer que $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\right) = 4\pi\delta(\mathbf{x})$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$

donc partout ailleurs qu'en $(0,0,0)$,

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\right) = \frac{3}{|\mathbf{x}|^3} - \frac{3|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}|^5} = 0$$

Calculons $\int \phi(x)\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\right)d^3\mathbf{x}$. On peut se limiter à une petite boule centrée en 0. Alors $\phi(x)\simeq\phi(0)$, et

$$\int \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\right)d^3\mathbf{x} = \int_{B(\mathbf{0},1)} \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\right)d^3\mathbf{x} = \int_{\substack{\text{sphère}\\ \text{unité}}} \frac{\mathbf{x.n}}{|\mathbf{x}|^3}\sin\theta\, d\phi\, d\theta = 4\pi$$

q. e. d.

Déduction des équations de champ d'Einstein

On cherche des équations reliant le tenseur de Riemann et le tenseur $T_M^{\mu\nu}$.

Attention

Les composantes de $T^{\mu\nu}$ sont déjà liées par des équations en l'absence d'autre force :

$$\frac{\partial(\sqrt{g}T^{\mu\nu})}{\partial x^\mu} = -\sqrt{g}\,\Gamma^{\,\nu}_{\mu\lambda}T^{\mu\lambda}.$$

Dans ces équations, $\Gamma^{\,\nu}_{\mu\lambda}$ représente le champ et $T^{\mu\lambda}$ la matière. Ce sont des équations aux dérivées partielles, non linéaires (au contraire, les équations de Maxwell entre $F^{\mu\nu}$ et J^μ sont linéaires).

Équations non linéaires $\rightarrow$ rétroaction des effets sur les causes

En l'absence de champ gravitationnel : conservation de la masse.
Dès que la masse engendre un champ gravitationnel,
la masse n'est plus conservée :

$$\begin{tikzcd} \text{masse } T^{\mu\nu} \arrow[r] & \text{champ } \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu},\ g_{\mu\nu} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

(au contraire, en électrodynamique, même en présence d'un champ électromagnétique, on a toujours $\frac{\partial(\sqrt{g}J^\mu)}{\partial x^\mu}=0$).

Conséquence

Les équations d'Einstein sont plus difficiles à résoudre que celles de Maxwell.

Problème

Pour appliquer le Principe d'Équivalence, il faudrait connaître l'équation du champ gravitationnel dans un référentiel localement inertiel ;
mais par définition, il n'y a pas de champ gravitationnel dans un référentiel localement inertiel en X!...

... Plus précisément, il n'y a pas de champ au voisinage de X, à l'ordre 1 en $(x-X)$.
Donc :

- $g_{\mu\nu}$ ne diffère de $\eta_{\mu\nu}$ que par des termes de degré 2 en $(x-X)$
- dans le référentiel localement inertiel en X, quand on s'éloigne un peu de X, on aura un champ faible

Cas particulier

champ faible stationnaire, matière non relativiste

- champ engendré par une masse M :

$$\begin{cases} \phi = -\dfrac{MG}{r} \\ g_{00} \simeq -1 - 2\phi \end{cases}$$

- champ engendré par un milieu continu de densité ρ :

$$\begin{cases} \nabla^2\phi = 4\pi G\rho \text{ (équation de Poisson)} \\ g_{00} \simeq -1 - 2\phi \end{cases}$$

T_{00} est la densité d'énergie.
matière non relativiste $\Rightarrow E_c = 0,\ E \simeq mc^2,\ T_{00} = \rho$

$$\Rightarrow\ \nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00}$$

En général, quelles pourraient être les équations d'un champ faible ?

- L'interaction gravitationnelle est la plus faible des forces fondamentales (beaucoup plus faible que l'interaction électromagnétique).
- En laboratoire, impossibilité d'expérimenter sur le champ gravitationnel (les champs produits artificiellement sont trop faibles pour être observables...).

$\longrightarrow$ il faut deviner les équations pour un champ faible :

$$G_{\alpha\beta} = -8\pi G T_{\alpha\beta}$$

où $G_{\alpha\beta}$ est linéaire en $g_{\mu\nu}$ et en ses dérivées premières et secondes.

Et pour un champ fort ? Utilisons le Principe d'Équivalence !

Soit un champ gravitationnel quelconque en un point X.
Son équation doit être de la forme $G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}$,
où $G_{\mu\nu}$ est un tenseur dont l'expression se réduit,
dans tout référentiel localement inertiel, à une combinaison linéaire de $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivées premières et secondes.

Conditions sur $G_{\mu\nu}$

(A) $G_{\mu\nu}$ doit être un tenseur

(B) Homogénéité : on supposera, dans un premier temps au moins, que $G_{\mu\nu}$ ne contient que des termes linéaires en les dérivées secondes ou quadratiques en les dérivées premières de $g_{\mu\nu}$

(C) $G_{\mu\nu}$ doit être symétrique

(D) ${G^\mu}_{\nu;\mu} = 0$

(E) champ faible stationnaire, matière non relativiste :
$G_{00} \simeq \nabla^2 g_{00}$

- (A) et (B) $\Rightarrow G_{\mu\nu} = c_1 R_{\mu\nu} + c_2 g_{\mu\nu} R$ (cf. chapitre précédent)
- Alors $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$ (C)
- ${G^\mu}_{\nu;\mu} = (g^{\mu\lambda} G_{\lambda\nu})_{;\mu} = c_1 {R^\mu}_{\nu;\mu} + c_2 {\delta^\mu}_\nu R_{;\mu}$

$$\text{Identités de Bianchi} \iff (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R)_{;\mu} = 0$$

$$\iff {R^\mu}_{\nu;\mu} = \frac{1}{2} {\delta^\mu}_\nu R_{;\mu}$$

donc (D) $\iff \left(\dfrac{c_1}{2} + c_2\right) R_{;\mu} = 0.$

- Si $R_{;\mu} = 0$, R serait une constante, on aurait alors :

  $G^\mu{}_\mu = c_1 R^\mu{}_\mu + c_2 \delta^\mu{}_\mu R = (c_1 + 4c_2)R = \text{constante} = -8\pi G T^\mu{}_\mu$

  absurde ! $T^\mu{}_\mu$ n'est pas une constante en général
  (la matière n'est pas partout homogène, il y a du vide, *etc.*)
- (D) $\Rightarrow c_2 = -\dfrac{1}{2}c_1$.

$$G_{\mu\nu} = c_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right)$$

(E) $\rightarrow c_1$?

- champ faible stationnaire, matière non relativiste

$$|T_{ij}| \ll |T_{00}|$$

par exemple pour un système de masses ponctuelles, comme $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$, on a $T_{ij} \simeq T^{ij}$, et

$$|T_{ij}| \simeq |T^{ij}| = \left| \sum m_n \int d\tau \frac{dx_n^i}{d\tau} \frac{dx_n^j}{d\tau} \delta^4(x - x_n(\tau)) \right|$$

où $\dfrac{dx_n^i}{d\tau} \ll c$ si la matière est non relativiste.

On aurait donc $|G_{ij}| \ll |G_{00}|$, d'où :

$$\begin{cases} G_{00} = c_1 \left(R_{00} - \dfrac{1}{2} g_{00} R \right) \\ 0 \simeq c_1 \left(R_{ij} - \dfrac{1}{2} g_{ij} R \right) \end{cases}$$

La deuxième équation entraîne que $R_{ij} \simeq \dfrac{1}{2} g_{ij} R$

$$\Rightarrow R = -R_{00} + R_{11} + R_{22} + R_{33} \simeq -R_{00} + \frac{3}{2}R.$$

D'où $R \simeq 2R_{00}$, qu'on reporte dans la première équation :

$$G_{00} \simeq 2c_1 R_{00}$$

Dans un référentiel localement inertiel, on a (*cf.* chap. précédent) :

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right)$$

Pour un champ stationnaire, les $\dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}$ s'annulent, donc :

$$R_{0000} = 0$$

$$R_{i0j0} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j}$$

$$R_{00} = -R_{0000} + R_{1010} + R_{2020} + R_{3030} \simeq \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00}$$

alors $G_{00} = 2c_1 \times \dfrac{1}{2} \nabla^2 g_{00}$

d'où $c_1 = 1$.

Conclusion

Équations de champ d'Einstein :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

Autre écriture possible :

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\lambda}{}_{\lambda} \right)$$

Démonstration

$$g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = g^{\mu\nu} (-8\pi) G T_{\mu\nu}$$

donc $R - 2R = -8\pi G T^{\mu}{}_{\mu}$, d'où $R = 8\pi G T^{\mu}{}_{\mu}$.
On reporte dans l'équation d'Einstein...

Une modification possible des équations d'Einstein

On peut affaiblir la condition d'homogénéité (B).
En particulier, l'équation suivante est très utilisée aujourd'hui :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

Le terme en rouge ne vérifie pas la condition (B).
λ doit être une constante de dimension (longueur)$^{-2}$:
c'est la constante cosmologique.

Une autre modification possible : la théorie de Brans-Dicke

Principe de Mach

Tout phénomène inertiel est un effet de l'accélération par rapport aux corps célestes proches ou lointains.

$\rightarrow$ Le rapport $\dfrac{m_i}{m_g}$ n'est peut-être pas une constante.

Ce rapport est contenu dans la constante gravitationnelle G.

$\rightarrow$ G n'est peut-être pas une constante.

Équation de Brans et Dicke

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\frac{8\pi}{\varphi} (T_M^{\mu\nu} + T_\varphi^{\mu\nu})$$

On a remplacé G par $\dfrac{1}{\varphi}$ où φ est un scalaire.

La gravitation serait causée par la matière et par un champ scalaire φ.
φ doit donc entrer aussi dans l'expression du tenseur énergie-impulsion total :

$$T_M^{\mu\nu} + T_\varphi^{\mu\nu}.$$

En revanche, toutes les autres équations de la relativité générale restent intactes : φ ne sert qu'à déterminer la courbure et il n'a aucun effet direct sur les équations du mouvement.
La conservation de l'énergie est toujours $T_M{}^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0$.

Hypothèse la plus simple :
φ serait lui-même déterminé par une équation d'onde de la forme

$$\Box^2\varphi = 4\pi\lambda T_M{}^{\mu}{}_{\mu}, \qquad \text{où } \Box^2\varphi = (g^{\lambda\kappa}\varphi_{;\lambda})_{;\kappa}.$$

Dans ces conditions, un peu d'analyse dimensionnelle et quelques calculs permettent de déterminer $T_\varphi^{\mu\nu}$ et λ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Box^2\varphi & = & \dfrac{8\pi}{3+2\omega} T_M{}^{\mu}{}_{\mu} \\ R_{\mu\nu} - \dfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R & = & -\dfrac{8\pi}{\varphi} T_{M\mu\nu} - \dfrac{\omega}{\varphi^2}\left(\varphi_{;\mu}\varphi_{;\nu} - \dfrac{1}{2} g_{\mu\nu}\varphi_{;\rho}\varphi_{;}{}^{\rho}\right) \\ & & -\dfrac{1}{\varphi}(\varphi_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\Box^2\varphi) \end{array}\right.$$

où ω est une constante, $\omega \simeq 1$
(si $\omega \gg 1$, on retrouve les équations d'Einstein...).

Choix de jauge

- Soit un système de coordonnées x^μ.
  $g_{\mu\nu}$ symétrique $\to$ 10 fonctions à déterminer au moyen des équations d'Einstein.
  $T_{\mu\nu}$ et $G_{\mu\nu}$ symétriques $\to$ 10 équations $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$
  mais $G^{\mu}{}_{\nu;\mu} = T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0$: ces 10 équations ne sont pas indépendantes et ne peuvent pas suffire à déterminer $g_{\mu\nu}$.

  $\Rightarrow$ on peut s'imposer 4 conditions supplémentaires sur les $g_{\mu\nu}$, et on obtiendra ainsi, pour chaque système de coordonnées, une solution déterminée des équations d'Einstein.

Pas besoin que ces 4 conditions soient des équations covariantes.

- Soit un système de coordonnées x^μ et une solution $g_{\mu\nu}$ quelconque des équations d'Einstein qui ne vérifie pas les 4 conditions.
  En général, il existe un changement de coordonnées $x \to x'$ tel que, dans le système de coordonnées x'^μ, les 4 conditions sont vérifiées et $g'^{\mu\nu}$ est solution des équations d'Einstein.

Le choix de 4 conditions supplémentaires et d'un tel système de coordonnées x'^μ s'appelle choix de jauge.
Il existe des choix plus ou moins judicieux.

Exemple : la jauge harmonique
On note $\Gamma^\lambda = g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$.
Les 4 conditions supplémentaires : $\Gamma^\lambda = 0$

Γ^λ n'est pas un tenseur. Règle de transformation :

$$\Gamma'^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho - g^{\rho\sigma}\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}$$

Pour que $\Gamma'^\lambda = 0$, il suffit de choisir un système de coordonnées x' (c'est la jauge harmonique) tel que

$$g^{\rho\sigma}\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho$$

On peut montrer qu'un tel système de coordonnées x'^{μ} vérifie alors :

$$(\forall \mu)\ \Box^2 x^{\mu} = 0 \qquad \text{où } \Box^2 \varphi = (g^{\lambda\kappa}\varphi_{;\lambda})_{;\kappa}$$

Ce choix particulier simplifie grandement l'équation d'Einstein pour les champs faibles.
Cette équation prend alors la forme d'une équation d'onde :

$$\Box^2 g_{\mu\nu} = -16\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} T^{\lambda}{}_{\lambda} \right)$$

$\rightarrow$ il existe des ondes gravitationnelles.

Un exemple de conditions initiales : problème de Cauchy

On suppose connus les $g_{\mu\nu}$ et les $\dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}$ partout à un instant initial $x^0 = t$.
Si l'on pouvait déduire les $\dfrac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial (x^0)^2}$ des 10 équations d'Einstein, alors on pourrait calculer les $g_{\mu\nu}$ et les $\dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}$ à l'instant $x^0 = t + \delta t$, et ainsi de suite ...

$\rightarrow$ méthode de résolution numérique

identités de Bianchi $\Rightarrow \dfrac{\partial G^{\mu 0}}{\partial x^0} = -\dfrac{\partial G^{\mu i}}{\partial x^i} - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} G^{\lambda\nu} - \Gamma^{\nu}_{\nu\lambda} G^{\mu\lambda}$

Le membre droit ne contient pas de $\dfrac{\partial^3 g_{\mu\nu}}{\partial (x^0)^3}$,
donc le membre gauche non plus ;
donc $G^{\mu 0} = -8\pi G T^{\mu 0}$ ne contient pas les $\dfrac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial (x^0)^2}$.
On n'a donc que 6 équations pour les $\dfrac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial (x^0)^2}$:

$$G^{ij} = -8\pi G T^{ij} \quad (1 \leq i, j \leq 3)$$

À ces 6 équations, on adjoint les 4 équations définissant la jauge harmonique :

$$\Gamma^{\lambda} = 0 \iff -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, g^{\lambda\kappa})}{\partial x^{\kappa}} = 0$$

On dérive par rapport à x^0 :

$$\frac{\partial^2(\sqrt{g}\, g^{\lambda 0})}{\partial (x^0)^2} + \frac{\partial^2(\sqrt{g}\, g^{\lambda i})}{\partial x^0 \partial x^i} = 0$$

d'où 4 conditions supplémentaires suffisantes pour déterminer les $\dfrac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial (x^0)^2}$.

Attention

il faut être sûr que les conditions initiales satisfont $G^{\mu 0} = -8\pi G T^{\mu 0}$.