

Plan

Tests de la relativité générale – Cosmologie

Erwan Penchèvre

2 juin 2014

Les tests de la Relativité Générale

Cosmologie

Bibliographie

Les tests de la Relativité Générale

4 / 35

Les tests de la Relativité Générale

5 / 35

Les tests de la Relativité Générale

Pour comparer les prédictions de la Relativité Générale avec les observations, il faut trouver la solution des équations d'Einstein décrivant le champ gravitationnel engendré par un astre de masse M à symétrie sphérique comme une étoile.

La **solution de Schwarzschild** (1916) décrit ce champ gravitationnel aux points où $T^{\mu\nu} = 0$ (dans le vide) :

$$d\tau^2 = \left(1 - 2\frac{GM}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2\frac{GM}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

(on reconnaît $g_{00} = -1 - 2\phi$)

Cette solution n'est définie que si $r > 2GM$.

$2GM$ est le **rayon de Schwarzschild**.

$2GM \simeq 3$ km pour le Soleil, 3 mm pour la Terre

Si la source du champ gravitationnel est extrêmement dense, le rayon de Schwarzschild risque d'être supérieur au rayon de l'astre lui-même.

On pense que de tels objets existent (**trous noirs**).

Ils sont difficiles à observer : aucune lumière ne s'en échappe.

1^{er} test : avance du périhélie de Mercure

En appliquant la solution de Schwarzschild au cas du Soleil, l'équation géodésique donne les trajectoires planétaires.

En première approximation : trajectoires de Kepler, vitesse aréolaire constante, relation entre période et grande axe.

Le Verrier 1859 : irrégularités dans la trajectoire de Mercure, malgré les corrections dues à l'influence gravitationnelle des autres planètes. L'avance du périhélie de Mercure devrait être de $531''$ par siècle, elle est de $574''$ par siècle.

Einstein 1915 : par rapport aux trajectoires de Kepler, la Relativité Générale prédit une avance du périhélie de Mercure de $43,03''$ par siècle.

2^{ème} test : déflexion de la lumière par des objets massifs

Un observateur sur Terre observe deux étoiles A et B.

La somme des angles du triangle TAB dépend de la courbure spatiale, qui dépend elle-même du champ gravitationnel au sein du triangle.

Eddington photographie les étoiles proches du disque du Soleil pendant une éclipse totale de Soleil en **1919** puis il compare avec une photographie des mêmes étoiles, de nuit. Il vérifie les prédictions d'Einstein quant à l'angle \widehat{ATB} .

Remarque

À condition de concevoir la lumière comme un flux de corpuscules, quelque soit leur masse, la physique newtonienne prédit aussi une déviation du rayon lumineux par le champ gravitationnel du Soleil, mais deux fois moindre que la Relativité Générale.

3^{ème} test : déplacement gravitationnel des longueurs d'onde

cf. expérience de **Pound et Rebka**
(ralentissement des horloges)

4^{ème} test : retard de Shapiro d'un écho radar

(années 60–70)

Même principe que Eddington 1919, mais avec une **onde radio**.

Onde radio émise en un point P du système solaire, vers un réflecteur situé en Q, en opposition par rapport au Soleil.

P et Q sont des planètes, sondes, ou fusées.

La Relativité Générale prédit le temps de parcours de l'onde émise et de l'onde réfléchie.

Qu'est-ce que la cosmologie ?

Objet

l'Univers considéré comme un tout

Questions

- ▶ Univers fini ? Rayon ?
- ▶ existence d'une origine dans le temps ? Âge de l'Univers ?
- ▶ y a-t-il une forme indépendamment du contenu ?
- ▶ rareté de la vie dans l'Univers
- ▶ densité moyenne ?
- ▶ ces questions ont-elles des réponses ?

Qu'offre la Relativité Générale à la cosmologie ?

- ▶ elle permet d'étudier ces questions d'un point de vue physique et non plus seulement philosophique
- ▶ elle propose des modèles cosmologiques, d'où une image de l'Univers et de son évolution

Problème fondamental

À une certaine échelle, assimilons la matière contenue dans l'Univers à un **fluide**.

- ▶ Univers \simeq gaz
- ▶ galaxies \simeq molécules

Quelles sont les propriétés de ce fluide ?

Univers homogène ou hiérarchique ?

- ▶ Un Univers homogène semblait soumis au paradoxe d'Olbers, mais la Relativité Restreinte résout le paradoxe autrement...
- ▶ radioastronomie : distribution uniforme des *quasars*, objets très lointains
- ▶ radioastronomie : isotropie du *fond diffus cosmologique* découvert en 1964 par Penzias et Wilson
- ▶ mais plus proche de nous, l'observation révèle des structures un peu hiérarchiques : amas de galaxies, amas d'amas,...

Univers \simeq fluide grumeleux assez homogène à grande échelle ?

Si la matière est un fluide homogène et isotrope à tout instant de l'histoire de l'Univers, alors elle obéit à la mécanique des fluides et à l'équation d'Euler pour les fluides parfaits.

définitions équivalentes d'un fluide parfait

- ▶ isotropie locale au voisinage de tout point qui se meut avec le fluide
- ▶ pas de viscosité
- ▶ le fluide n'oppose aucune force de frottement à son propre écoulement

Attention

C'est une idéalisation !

Ni l'eau ni l'air ne sont des fluides parfaits...

Nature, distance et vitesse des galaxies

Distance d'une étoile

- ▶ Parallaxe : seulement pour des étoiles proches
- ▶ 1912 Henrietta Leavitt
Les céphéides (étoiles semblables à δ *Cephei*) ont une magnitude variable de période T .
 $\ln T \sim$ magnitude absolue
(T , magnitude apparente) \mapsto distance
- ▶ 1923 Edwin Hubble observe des céphéides dans M31
distance énorme ! \Rightarrow M31 est situé hors de notre galaxie
- ▶ années 1990 : les *supernovae* de type Ia ont presque toutes la même magnitude absolue
donc magnitude apparente \sim distance
exemple : *supernova* de 1994 dans NGC 4526 dans l'amas de la Vierge

la grande découverte de Hubble

Les télescopes du XX^{ème} siècle permettent d'observer de nombreuses étoiles distinctes au sein d'un objet comme M31
 ⇒ M31 est un amas d'étoiles comparable à notre galaxie

attention : galaxie ≠ nébuleuse (exemple Nébuleuse du Crabe M1)

structure hiérarchique

Les galaxies ne sont pas distribuées de manière uniforme.

- ▶ amas de galaxies, groupes de galaxies (exemples : Groupe Local, Amas de la Vierge M49-M86-M87-...)
- ▶ amas de galaxies ≠ amas stellaire (exemple d'amas stellaire dans notre galaxie : Pléiades M45)
- ▶ superamas = un amas d'amas et de groupes de galaxies (exemple : superamas de la Vierge)

Galaxie d'Andromède M31

(dans le groupe local)
 visible à l'œil nu
 distance : 2550000 a.l.
 observée au Moyen-Âge
 par les astronomes arabes
 M32 du groupe local aussi sur la photo



m31.jpg

galaxie NGC 4526

(dans l'Amas de la Vierge)
 distance : 51000000 a.l.
 photo de 1994 :
 NGC 4526 contient une *supernova* de type Ia



ngc-4526.jpg

distance des étoiles les plus proches : quelques années-lumières

Nébuleuse du Crabe M1

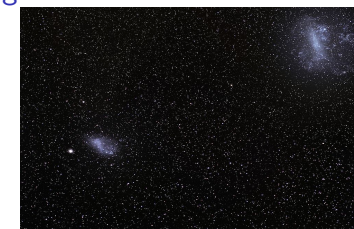
(dans la Voie Lactée)
 restes d'une des premières *supernovae*, observée par des astronomes chinois en 1054, peut-être de type Ia,
 distance : 6200 a.l.
 1 a.l. $\approx 10^{16}$ m



crabe.jpg

deux galaxies : les nuages de Magellan

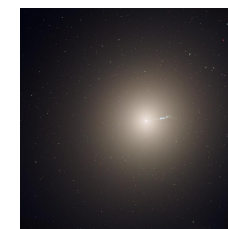
(dans le groupe local)
 visibles à l'œil nu (sud)
 galaxies très proches de nous
 distance : 180000 a.l.



smc-lmc.jpg

galaxie M87

(dans l'Amas de la Vierge)
 distance : 53500000 a.l.



m87.jpg

Amas d'Hercule

un amas de galaxies, situé hors du Superamas de la Vierge,
 distance : 500000000 a.l. ?



hercule.jpg

loi de Hubble-Humason (1928)

effet Doppler \mapsto mesure de la vitesse des galaxies

$$\frac{\dot{R}}{R} = H$$

où R est la distance de la galaxie, \dot{R} sa vitesse radiale, et H est la **constante de Hubble** (qui varie dans le temps).

$$H \simeq 70 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1} \simeq 20 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mal}^{-1}$$

Si on avait $\dot{H} = 0$, on aurait $\frac{d(\ln R)}{dt} = H$,

d'où $R = \text{constante} \times e^{Ht}$.

On appelle donc **âge de l'Univers** la constante $\frac{1}{H}$ et on a :

$$\frac{1}{H} \simeq 15 \text{ milliards d'années}$$

Métrique de Robertson-Walker

Si la matière ($T^{\mu\nu}$) est homogène et isotrope, des considérations de symétrie montrent que toute métrique $g_{\mu\nu}$ solution des équations d'Einstein peut s'écrire :

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{a^2(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Cause de l'expansion de l'Univers ?

La Relativité Générale pourrait expliquer l'expansion par l'évolution de la métrique. Pour mieux comprendre, raisonner par analogie avec :

- ▶ un plan euclidien en expansion
- ▶ un ballon sphérique qu'on gonfle
(les distances s'accroissent, et la courbure diminue)

Remarque

C'est bien un phénomène **isotrope** ; on a la même loi quelque soit l'origine à partir de laquelle sont mesurées les distances.

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{a^2(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Le **facteur d'échelle** $a(t)$ est homogène à une distance.

Il donne l'échelle des distances au temps t .

- ▶ Si $k = 0$, les sections de l'espace-temps à t constant sont des espaces tridimensionnels euclidiens.
- ▶ Si $k = 1$, les sections sont des hypersphères (espaces finis). Dans un tel espace, l'aire d'une sphère de rayon R est

$$4\pi a^2(t) \sin^2 \left(\frac{R}{a(t)} \right) \quad (\text{cf. application})$$

et $\frac{\pi a(t)}{2}$ est le rayon de la plus grande sphère.

- ▶ Si $k = -1$, les sections sont des espaces infinis où règne une géométrie hyperbolique de courbure négative.

Équations de Friedmann

Tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p + \rho)U^\mu U^\nu$$

où, en chaque point, U^μ est le quadri-vecteur vitesse d'un point qui se meut avec le fluide.

La pression p et la densité ρ sont liés par l'équation d'Euler (mécanique des fluides).

Pour un $T^{\mu\nu}$ de cette forme, les équations d'Einstein peuvent s'écrire sous la forme suivante (« équations de Friedmann ») :

$$8\pi G\rho = \frac{3(\dot{a}^2 + k)}{a^2}$$

$$8\pi Gp = -\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}$$

Matière non relativiste

Si la matière est non relativiste, p est négligeable devant ρ . En posant $p = 0$, les équations de Friedmann deviennent :

$$8\pi G\rho = \frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3k}{a^2}$$

$$0 = \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}$$

Au moyen de ces deux équations, on montre que :

$$\frac{4}{3}\pi \frac{d(G\rho a^3)}{dt} = 0$$

On notera

$$M = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$$

où M est donc une constante de la dimension d'une masse.

Big Bang

En éliminant \dot{a} dans les équations de Friedmann, on obtient :

$$\frac{6\ddot{a}}{a} = -8\pi G(\rho + 3p)$$

$\ddot{a} < 0 \Rightarrow a$ est une fonction concave du temps ; le graphe de a doit donc couper l'axe des t . En ce point :

- ▶ $a(t) = 0$
- ▶ ρ tend vers l'infini
- ▶ $g_{\mu\nu}$ n'est plus une matrice inversible
- ▶ la Relativité Générale ne s'applique plus
- ▶ physique quantique, inégalités de Heisenberg, etc.

C'est la **Singularité Cosmologique** aussi appelée Big Bang.

On peut alors montrer que les équations de Friedmann se réduisent à l'équation suivante :

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{MG}{a} = -\frac{k}{2}$$

Cette équation peut être résolue analytiquement :

- ▶ Si $k = 0$, alors pour $t \in [0, +\infty[$:

$$a(t) = \left(\frac{9MG}{2}\right)^{1/3} t^{2/3}$$

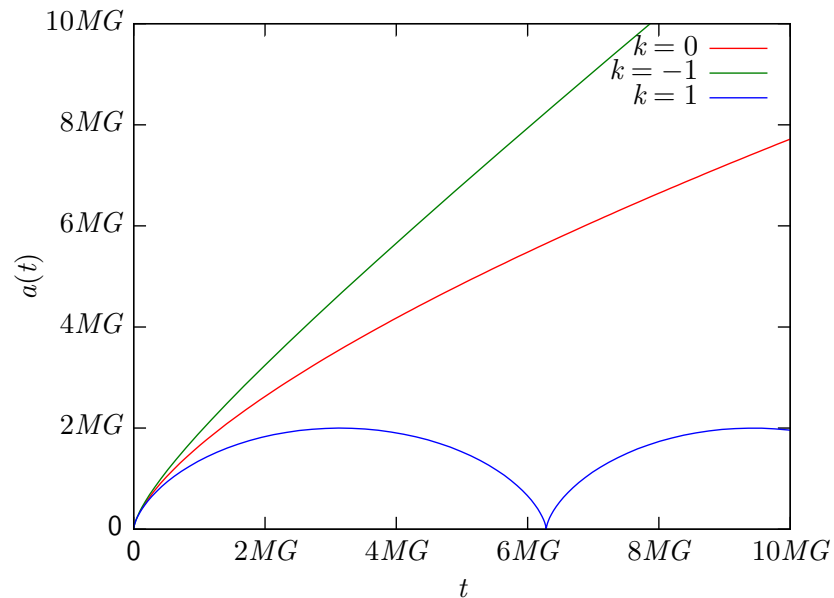
- ▶ Si $k = -1$, alors pour $\eta \in [0, +\infty[$:

$$t = MG(\sinh \eta - \eta), \quad a = MG(\cosh \eta - 1)$$

- ▶ Si $k = 1$, alors pour $\eta \in [0, \pi]$:

$$t = MG(\eta - \sin \eta), \quad a = MG(1 - \cos \eta)$$

solutions de Friedmann avec pression nulle



Densité observée

Des méthodes statistiques pour estimer l'énergie totale des galaxies donnent :

$$\rho \simeq 3.10^{-31} \text{ g.cm}^{-3}$$

On aurait donc $\frac{\rho}{\rho_c} \simeq 0,02$ et $k < 0$: l'Univers serait infini, éternellement en expansion, avec une courbure négative.

Paramètre de décélération

On rappelle qu'en éliminant \dot{a} , on avait trouvé :

$$8\pi G\rho = -6\frac{\ddot{a}}{a}$$

d'où, en divisant par ρ_c :

$$\frac{1}{2}\frac{\rho}{\rho_c} = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -1 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{H}\right)$$

Que révèlent les observations ?

Confrontons ce modèle de Friedmann (pression nulle) aux observations.

Densité critique

La constante de Hubble est $H = \frac{\dot{a}}{a}$.

En posant $\dot{a}^2 = a^2 H^2$ dans l'équation de Friedmann, et en remplaçant M par sa valeur, on obtient :

$$-k = a^2 H^2 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right)$$

où la **densité critique** ρ_c est définie par :

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \simeq 10^{-29} \text{ g.cm}^{-3}$$

On appelle $q = \frac{1}{2}\frac{\rho}{\rho_c}$ le **paramètre de décélération**.

Une contradiction

Une fine analyse des observations quant aux distances et aux vitesses des galaxies donne des estimations de H et de $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{H}\right)$, d'où une estimation de q :

$$q \simeq 1, \quad \rho \simeq 2.10^{-29} \text{ g.cm}^{-3}, \quad \frac{\rho}{\rho_c} \simeq 2$$

Ce résultat contredit le précédent, et le signe de k reste alors difficile à trancher...

Comment résoudre la contradiction ?

Selon cette estimation de q , il y aurait donc cent fois plus de matière qu'on ne pensait !

Elle est invisible : **matière noire**.

Où se cache-t-elle ?

- ▶ gaz chaud, source de rayons X détectables
- ▶ photons et neutrinos (masse nulle...)
- ▶ ça ne suffit pas : matière inconnue ?
(il en faudrait beaucoup)

Bibliographie

- ▶ S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, 1972.
- ▶ M. Boratav et R. Kerner, *Relativité*, ellipses, 1991.
- ▶ A. Barrau et J. Grain, *Relativité générale*, Dunod, Paris, 2011.
- ▶ J. Merleau-Ponty et B. Morando, *Les trois étapes de la cosmologie*, Robert Laffont, 1971.

Pour s'initier à la physique quantique :

- ▶ J.-M. Lévy-Leblond et F. Balibar, *Quantique – Rudiments*, Dunod.

Univers inflationnaire

Les données de l'observation, en particulier sur le fond diffus cosmologique, rendent aussi plausible l'existence d'une période **inflationnaire** où l'expansion de l'univers serait accélérée, $\ddot{a} > 0$, en contradiction avec le modèle ci-dessus.

Cette contradiction pourrait être résolue avec la variante des équations d'Einstein mentionnée dans le chapitre précédent :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \lambda g_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}$$

et pour se distraire

- ▶ une image du monde céleste de l'Antiquité au Moyen-Âge :
<http://people.sc.fsu.edu/~dduke/ptolemy.swf>
- ▶ une image du monde céleste à la fin de la Renaissance :
<http://www.calderon-online.com/trabajos/kepler/harmonicemundi.swf>
- ▶ une image de l'Univers, aujourd'hui :
<http://htwins.net/scale2/>
- ▶ un très bon film :
Nostalgie de la lumière (Patricio Guzmán, 2010)