Rappels : loi de probabilité, $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{V}(X)$, probabilité conditionnelle.

Exercice 1 Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et pertes occasionnées par cette pratique. Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à α. Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros.

Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude. Soit X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i-ème trajet et la valeur 0 sinon. Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{40}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X, puis calculer $\mathrm{E}(X)$ et $p(X \le 2)$.
2. Soit Z le gain algébrique (c'est-à-dire positif en cas de gain et négatif en cas de perte) réalisé par le fraudeur. Remarquer que Z est fonction affine de X et en déduire son espérance.
3. Remarquer que $p(X \le 2)$ est une fonction de α, soit $f(\alpha)$. Montrer que f est strictement décroissante sur $[0,1]$. Résoudre par approximation l'équation

$$f(\alpha) = 0,01$$

   En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à α afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à $99\ \%$.

Exercice 2 [IV.171] Au bridge, le jeu compte cinquante-deux cartes, quatre « couleurs » (trèfle, pique, cœur, carreau) pour chacune des treize figures (as, roi, dame, valet, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10). On constitue une « main » en tirant successivement treize cartes. On s'intéresse au nombre de cartes d'un « atout » (c'est-à-dire d'une « couleur ») fixé à l'avance, mettons par exemple, les carreaux.

1. On constitue une main comme on vient de l'expliquer. On note X le nombre de cartes de la couleur « carreau ». Montrer que, pour $0 \le k \le 13$,

$$p(X = k) = \frac{C_{13}^{k} C_{39}^{13-k}}{C_{52}^{13}}$$

   Montrer qu'alors, si $k+1 \le 13$, on a la formule de récurrence :

$$p(X = k+1) = \frac{(13-k)^2}{(k+1)(27+k)} p(X = k)$$

   Calculer explicitement $p(X = 0)$.
2. On réalise 3400 fois le choix d'une main de bridge. Quelle est la fréquence théorique des valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 à 13, du nombre de « carreaux » pour ces 3400 épreuves ?

Exercice 3 [IV.175, I.86-87] Soit X une variable aléatoire réelle positive (et on suppose que $\mathrm{E}(X) > 0$). Soit $\lambda > 0$. On définit la variable aléatoire Y ainsi :

$$Y(\omega) = \begin{cases} \lambda \mathrm{E}(X) \text{ si } X(\omega) \ge \lambda \mathrm{E}(X) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrer que $\mathrm{E}(Y) \le \mathrm{E}(X)$, puis que :

$$\mathrm{E}(Y) = p\,(X \ge \lambda \mathrm{E}(X))\,\lambda \mathrm{E}(X)$$

En déduire que (« inégalité de Markov ») :

$$p\,(X \ge \lambda \mathrm{E}(X)) \le \frac{1}{\lambda}$$

Soit à présent une autre variable aléatoire réelle Z. Utiliser l'inégalité de Markov pour majorer $p\big((Z - \mathrm{E}(Z))^2 \ge \lambda \mathrm{V}(Z)\big)$. En déduire que, pour tout $\epsilon > 0$, on a (« inégalité de Bienaymé-Tchebychev ») :

$$p(|Z - \mathrm{E}(Z)| \ge \epsilon) \le \frac{\mathrm{V}(Z)}{\epsilon^2}$$

Exercice 4 En phase finale d'un jeu télévisé, il y a une voiture à gagner. Le présentateur montre trois portes, derrière une porte il y a la voiture et derrière les deux autres un cochon. Il demande au candidat de choisir une porte. Le présentateur ouvre alors l'une des deux autres portes ; il y a un cochon derrière. Il reste donc deux portes derrière lesquelles la voiture puisse être. Le candidat a-t-il intérêt à conserver son choix ou bien devrait-il au contraire changer d'avis et ouvrir l'autre porte ?

Exercice 5 Soit une population E de cardinal n au sein de laquelle on choisit aléatoirement un échantillon de cardinal p pour effectuer un sondage électoral. Cette expérience peut être modélisée par un espace de probabilité avec

$$\Omega = E^p$$

On note :

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & E \\ (x_1, x_2, \dots, x_p) & \mapsto & x_i \end{array}$$

Soit $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_q$ une partition de E où E_i désigne l'ensemble des électeurs partisans du i-ème candidat à la présidentielle. On note :

$$(\forall i \in [\![1, q]\!]) \quad Z_i : \omega \mapsto Z_i(\omega) = \mathrm{card}\{j \mid X_j(\omega) \in E_i\}$$

1. Ecrire chaque Z_i comme somme d'indicatrices.
2. Si le choix de l'échantillon est fait à la manière d'un « tirage avec remise », quelle est la loi de Z_1 ? Et s'il est fait à la manière d'un « tirage sans remise » ?
3. On suppose désormais que l'échantillon est choisi par p tirages successifs avec remise. Notons $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_q)$. Quelle est la loi de probabilité de ce q-uplet ?

Exercice 6 Soit P_0, P_1,...,P_{359} une famille de points uniformément répartis le long d'un cercle $\mathscr{C}$ de périmètre c (c'est-à-dire que $(\forall i)\widehat{P_iP_{i+1}} = \widehat{P_0P_1}$). On peint en rouge l'arc $\widehat{P_0P_{90}}$ de longueur $\frac{c}{4}$ et d'origine P_0, dans le sens trigonométrique. Puis on choisit au hasard un point P_I. On peint en rouge l'arc de longueur $\frac{c}{4}$, d'origine P_I, dans le sens trigonométrique. Soit X la longueur totale colorée en rouge. I et X sont deux variables aléatoires :

$$I : \Omega \longrightarrow [0, 359]$$

$$X : \Omega \longrightarrow \left[\frac{c}{4}, \frac{c}{2}\right]$$

1. Calculez la longueur $\ell\left(\widehat{P_0P_{90}} \cup \widehat{P_iP_{i+90}}\right)$ en termes des indicatrices $\mathbb{1}_{i<90}$ et $\mathbb{1}_{i>270}$.
2. Exprimez X en fonction de I, puis calculez $\mathrm{E}(X)$.
3. Il y a une autre manière de calculer $\mathrm{E}(X)$:

$$X = \frac{c}{360} \times (\mathbb{1}_{A_1} + \mathbb{1}_{A_2} + \dots + \mathbb{1}_{A_{360}})$$

   où A_i est l'événement qui se produit quand l'arc $\widehat{P_{i-1}P_i}$ est peint en rouge. Que vaut $p\left(\overline{A_i}\right)$? Déduisez-en $\mathrm{E}(\mathbb{1}_{A_i})$ et $\mathrm{E}(X)$.
4. Le jeu continue. À présent, on choisit au hasard un second point P_J. On peint en rouge un arc de longueur $\frac{c}{4}$, d'origine P_J, dans le sens trigonométrique. Soit Y la longueur totale colorée en rouge depuis le début. J et Y sont des variables aléatoires :

$$J : \Omega \longrightarrow [0, 359]$$

$$Y : \Omega \longrightarrow \left[\frac{c}{4}, \frac{3c}{4}\right]$$

   Soit $\mathscr{F} = \sigma(I)$ la tribu engendrée par I. Posons $f(i,j) = \ell\left(\widehat{P_0P_{90}} \cup \widehat{P_iP_{i+90}} \cup \widehat{P_jP_{j+90}}\right)$. On ne calculera pas sa valeur bien que cela puisse être fait (en termes d'indicatrices...). Montrez que $Y = f(I, J)$, puis calculez $\mathrm{E}(Y)$.
5. Il y a une autre manière de calculer $\mathrm{E}(Y)$: utilisez la même méthode que dans la question 3.
6. Déduisez de la question 5 que

$$\sum_{i=0}^{359} \sum_{j=0}^{359} f(i,j) = 74925c.$$

Laws, Expectation, Variance, Conditional Probability

Exercice 1 Claude is traveling twice a day, five days a week, but he does never buy any ticket. On every trip, there is a probability α that the rail company would check his ticket. The price of the ticket is 10 EUR, the fine is 100 EUR. Let

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ if Claude is checked on trip } i \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{40}$$

1. What is the law of X? Calculate $\mathrm{E}(X)$, and $p(X \leq 2)$.
2. Let Z be Claude's algebraic gain (positive in case of a gain, negative in case of a loss). Express Z as a function of X, and calculate the expectation of Z.
3. Show that $p(X \leq 2)$ is a function of α, call it $f(\alpha)$. Show that f is strictly decreasing on $[0,1]$. Solve (approximately)

   $$f(\alpha) = 0.01$$

   What is the minimal value of α such that the probability that Claude would be checked more than three times is greater than or equal to 99 %?

Exercice 2 In a deck of 52 playing cards, there are four groups of thirteen cards called *suits* : spades, clubs, hearts and diamonds. We pick randomly 13 cards from a shuffled deck (we draw 13 times at random, without replacing the cards already drawn in the deck).

1. Let X be the number of *diamond* cards among the thirteen cards thus drawn. Show that, for all $0 \leq k \leq 13$,

   $$p(X = k) = \frac{C_{13}^{k} C_{39}^{13-k}}{C_{52}^{13}}$$

   Show that, if $k+1 \leq 13$:

   $$p(X = k+1) = \frac{(13-k)^2}{(k+1)(27+k)} p(X = k)$$

   Calculate explicitly $p(X = 0)$.
2. Let's iterate 3400 times this random experiment. What is the theoretical frequency of values 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ≥ 9, of the number of diamond cards for these 3400 samples?

Exercice 3 Let X be a real-valued non-negative random variable such that $\mathrm{E}(X) > 0$. Let $\lambda > 0$. Let Y be a random variable such that :

$$Y(\omega) = \begin{cases} \lambda \mathrm{E}(X) \text{ if } X(\omega) \geq \lambda \mathrm{E}(X) \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

Show that $\mathrm{E}(Y) \leq \mathrm{E}(X)$, and that ("Markov inequality") :

$$\mathrm{E}(Y) = p\left(X \geq \lambda \mathrm{E}(X)\right) \lambda \mathrm{E}(X)$$

Deduce :

$$p\left(X \geq \lambda \mathrm{E}(X)\right) \leq \frac{1}{\lambda}$$

Now, let Z be another real-valued random variable. Use the inequality proved above to majorate $p\left((Z - \mathrm{E}(Z))^2 \geq \lambda \mathrm{V}(Z)\right)$. Deduce that, for all $\epsilon > 0$ ("Bienaymé-Tchebychev inequality") :

$$p(|Z - \mathrm{E}(Z)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{V}(Z)}{\epsilon^2}$$

Exercice 4 On a TV game show, the contestant is shown three closed doors. Behind one of the doors is a car, and behind the other two, are pigs. The contestant first chooses a door (without opening it). The TV host then opens one of the other two doors; there is a pig in it. There are still two doors, and one of them hides a car. Either the contestant stays with his original choice, or he switches. What should he do?

Exercice 5 Let E be a population, $|E| = n$. For an electoral survey, we draw at random p elements of this population. This random experiment could be modelized with a probability space $\Omega = E^p$. Let X be the random variable defined by :

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & E \\ (x_1, x_2, \dots, x_p) & \mapsto & x_i \end{array}$$

Let's write E as a disjoint union $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_q$, where E_i is the set of people who are going to vote for candidate number i. We also define random variables $Z_1, Z_2, \dots, Z_q$ as such :

$$(\forall i \in [\![1, q]\!]) \quad Z_i : \omega \mapsto Z_i(\omega) = \mathrm{card}\{j \mid X_j(\omega) \in E_i\}$$

1. Write every Z_i as a sum of indicatrices.
2. If the sampling is done by *drawing without replacement*, what is the law of Z_1 ? What if it is done by *drawing with replacement* ?
3. Let us now suppose it is done by drawing p elements with replacement. Let Z be the q-uple random variable $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_q)$. What is the law of Z ?

Exercice 6 Let P_0, P_1,...,P_{359} be 360 equally spaced points on a circle $\mathscr{C}$ of perimeter c. Paint in red the arc $\widehat{P_0P_{90}}$ of length $\dfrac{c}{4}$ starting from P_0, counter-clockwise. Then choose at random a point P_I. Paint in red an arc of length $\dfrac{c}{4}$, starting from P_I, counter-clockwise. Call X the total coloured length. I and X are two random variables :

$$I : \Omega \longrightarrow [\![0, 359]\!]$$
$$X : \Omega \longrightarrow \left[\frac{c}{4}, \frac{c}{2}\right]$$

1. Calculate the length $\ell\left(\widehat{P_0P_{90}} \cup \widehat{P_iP_{i+90}}\right)$ in terms of the indicatrices $\mathbb{1}_{i<90}$ and $\mathbb{1}_{i>270}$.
2. Calculate X as a function of I, and $\mathrm{E}(X)$.
3. There is another way to calculate $\mathrm{E}(X)$:

$$X = \frac{c}{360} \times (\mathbb{1}_{A_1} + \mathbb{1}_{A_2} + \dots + \mathbb{1}_{A_{360}})$$

   where A_i is the event occuring when the arc $\widehat{P_{i-1}P_i}$ has been painted in red. What is $p\left(\overline{A_i}\right)$? Use it to calculate $\mathrm{E}(\mathbb{1}_{A_i})$ and $\mathrm{E}(X)$.
4. The game continues. Now, choose at random another point P_J. Paint in red an arc of length $\dfrac{c}{4}$, starting from P_J, counter-clockwise. Call Y the total coloured length since the beginning. J and Y are random variables :

$$J : \Omega \longrightarrow [\![0, 359]\!]$$
$$Y : \Omega \longrightarrow \left[\frac{c}{4}, \frac{3c}{4}\right]$$

   Let $\mathscr{F} = \sigma(I)$ be the σ-algebra generated by I. Put $f(i,j) = \ell\left(\widehat{P_0P_{90}} \cup \widehat{P_iP_{i+90}} \cup \widehat{P_jP_{j+90}}\right)$. We won't calculate its value, althought it could be done (in terms of indicatrices...). Prove that $Y = f(I,J)$. Calculate $\mathrm{E}(Y)$.
5. There is another way to calculate $\mathrm{E}(Y)$: use the same method as in question 3.
6. Deduce from question 5 that

$$\sum_{i=0}^{359} \sum_{j=0}^{359} f(i,j) = 74925c.$$

Actualisation des flux et capitalisation des intérêts

Exercice 1 Si vous placez 1000 euros aujourd'hui au taux annuel nominal de 10 %, en capitalisation annuelle, quelle somme aurez-vous dans 20 ans ? Et si la capitalisation était mensuelle ? Et si elle était « continue » ?

Exercice 2

a) Si vous placez 100 euros chaque année pendant les prochaines 20 années sur un compte rémunéré à 10 %, en commençant à placer dans un an, combien aurez-vous d'ici 20 ans ?

b) Combien devrez-vous placer chaque année à ce taux pour obtenir 50000 euros dans 20 ans ?

Exercice 3 Quelle est la valeur actuelle des cash-flows suivants, si on a un taux d'actualisation de 10 % par an ?

a) 100 euros perçus dans cinq ans.

b) 100 euros perçus dans 60 ans.

c) 100 euros reçus chaque année, le premier versement étant fait dans un an, et le dernier dans 10 ans.

d) 100 euros reçus chaque année, pendant 10 ans, à partir de maintenant.

e) 100 euros perçus chaque année, à partir de l'an prochain, et jusqu'à l'infini.

Exercice 4 Vous voulez créer un fonds qui vous procure 1000 euros par an pendant quatre ans, date à laquelle il ne restera plus rien. Combien devez-vous placer dans ce fonds si le taux d'intérêt est de 10 % par an ?

Exercice 5 Vous empruntez 1000 euros pour un an, au taux de 12 % annuel (c'est un taux nominal), remboursable en douze mensualités constantes.

a) Quel est le montant d'une mensualité ?

b) Quel est le total des intérêts payés au bout de 12 mois ?

Discounting Cash Flows and Compound Interest

Exercice 1 Suppose you are saving 1000 EUR today, with a nominal interest rate of 10 %, yearly compounded. What amount will you own it 20 years ? What if the compounding is monthly ? What if it is "continuous" ?

Exercice 2

a) If you save 100 EUR every year during the next 20 years, on a bank account with a yearly interest rate of 10 %, starting in one year from now, how much will you own in 20 years ?

b) On the same bank account, how much should you save every year in order to own 50000 EUR in 20 years ?

Exercice 3 What is the present value of the following cash flows, if the interest rate is 10 % per annum ?

a) 100 EUR received in five years.

b) 100 EUR received in 60 years.

c) 100 EUR received every year, the first payment being made in one year and the last one in 10 years from now.

d) 100 EUR received every year, during 10 years, starting now.

e) 100 EUR received every year, starting next year, continuing forever.

Exercice 4 You want to create a fund generating 1000 EUR per year for four years (nothing left for the fifth year). How much should save in this fund if the interest rate is 10 % per annum ?

Exercice 5 You borrow 1000 EUR for a year, repayable in twelve constant monthly instalments ; the nominal interest rate is 12 % per annum.

a) How much is the monthly instalment ?

b) How much is the total interest payed in 12 months ?

Espérance conditionnelle et tribus

Exercice 1 On joue n fois à un jeu de pile ou face biaisé ; le $k^{\text{ème}}$ coup est représenté par une variable aléatoire X_k de Bernoulli vérifiant $p(X_k = 1) = \alpha$; la suite de variables aléatoires $(X_k)_{1<k<n}$ est supposée indépendante. Si $p \leq n$, $S_p = \sum_1^p X_k$ représente le nombre de piles tombés au cours des p premiers coups. Montrer que la loi de S_p est la loi binomiale de paramètres (α, p), et que sa loi conditionnelle sachant S_n est une loi hypergéométrique dont on précisera les paramètres. Calculer l'espérance conditionnelle sachant S_n.

Exercice 2 Soient p et q deux entiers strictement positifs et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_q$ des réels strictement positifs. On pose

$$H = \{k \in [\![0,p]\!]^q \mid k_1 + ... + k_q = p\}$$

On dit qu'une variable aléatoire $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_q)$ à valeurs dans $[\![0,p]\!]^q$ est multinomiale de paramètres $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_q, p, q$ si sa loi de probabilité est portée par H et définie par

$$(\forall k \in H) \quad p((Z_1 = k_1) \cap (Z_2 = k_2) \cap ... \cap (Z_q = k_q)) = \frac{p!}{k_1! k_2! ... k_q!} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} ... \alpha_q^{k_q}$$

Soit Z une telle variable aléatoire ; montrer que la loi conditionnelle de $(Z_1, Z_2, ..., Z_{q-1})$ sachant Z_q est la loi multinomiale de paramètres $\dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_q}, \dfrac{\alpha_2}{1-\alpha_q}, ..., \dfrac{\alpha_{q-1}}{1-\alpha_q}$, $p - Z_q$, $q-1$; on notera que le support de cette loi conditionnelle est aléatoire.

Exercice 3 Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ une suite de n variables aléatoires réelles, indépendantes, équidistribuées. On pose $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{E}(X_1 f(S_n)) = \mathrm{E}(X_2 f(S_n)) = ... = \mathrm{E}(X_n f(S_n))$.

b) En déduire que $\mathrm{E}(X_1 \mid S_n) = \dfrac{S_n}{n}$.

Exercice 4 [VII.149,152] Soit S_0 une constante, $0 < d < u$ et X_n une suite de variables indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans $\{u, d\}$ telle que $p(X_n = u) = p$. On considère la suite $(S_n)_{n\geq 1}$, définie par $S_n = X_n S_{n-1}$ pour $n \geq 1$ qui est un modèle d'évolution d'un actif financier. Soit $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathscr{F}_1 = \sigma(X_1)$, $\mathscr{F}_2 = \sigma(X_1, X_2)$.

1. Montrer que $\sigma(S_2) \neq \mathscr{F}_2$.
2. Calculer $\mathrm{E}(S_2 \mid \mathscr{F}_1)$ et $\mathrm{E}(S_2 \mid \mathscr{F}_0)$ et vérifier que $\mathrm{E}(\mathrm{E}(S_2 \mid \mathscr{F}_1) \mid \mathscr{F}_0) = \mathrm{E}(S_2)$.
3. Si $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}(X_1, X_2, ..., X_n)$, donner une formule pour $\mathrm{E}(S_n \mid \mathscr{F}_k)$ pour tout $k \leq n$

Exercice 5 [VII.72,105-106] Supposons $(\forall \omega)$ $p(\{\omega\}) > 0$, et posons $|\Omega| = n$. On notera $\mathscr{V}$ l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles sur Ω et $\mathscr{V}_Z$ le sous-ensemble de $\mathscr{V}$ formé des fonctions déterministes de Z ; on posera enfin $|Z(\Omega)| = p$.

1. On munit $\mathscr{V}$ du produit scalaire défini par $\langle X, Y \rangle = \mathrm{E}(XY)$; donner la dimension de l'espace euclidien ainsi défini, et celle du sous-espace $\mathscr{V}_Z$.
2. Soit $X \in \mathscr{V}$; montrer que $\mathrm{E}(X \mid Z)$ est la projection euclidienne de X sur $\mathscr{V}_Z$.
3. On note $\mathscr{R}_Z$ le sous-espace de $\mathscr{V}$ formé des variables aléatoires réelles qui sont des fonctions affines de Z. Quelle est sa dimension ? Montrer que la projection euclidienne $R(X \mid Z)$ de X sur $\mathscr{R}_Z$ est donnée par
$$Y = \mathrm{E}(X) + r(Z - \mathrm{E}(Z))$$
quand on a posé $r = \dfrac{\mathrm{cov}(X,Z)}{\mathrm{V}(Z)}$.
4. Montrer sans calcul l'inégalité $\mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X \mid Z))^2) \leq \mathrm{E}((X - R(X \mid Z))^2)$.
5. Montrer que $\mathrm{E}(X \mid Z) = R(X \mid Z)$ si $|Z(\Omega)| = 2$.

Conditional Expectation and σ-Algebras

Exercice 1 Toss a coin n times. Suppose the coin is loaded, such that the probability of doing "head" is α. The kth toss is represented by a Bernoulli random variable X_k such that $p(X_k = 1) = \alpha$. The sequence of random variables $(X_k)_{1<k<n}$ is independent. For $p \leq n$, $S_p = \sum_1^p X_k$ is the number of "heads" among the first p tosses. Prove that the law of S_p is the binomial law of parameters (α, p), and that the conditional law of S_p given S_n is the hypergeometric law (give its parameters). Calculate its conditional expectation, given S_n.

Exercice 2 Let p and q be two strictly positive integers and $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_q$ some strictly positive real numbers. Set

$$H = \{k \in [\![0, p]\!]^q \mid k_1 + ... + k_q = p\}$$

One says that a random variable $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_q)$ with values in $[\![0, p]\!]^q$ is multinomial with parameters $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_q, p, q$ if its law of probability is supported in H and :

$$(\forall k \in H) \quad p((Z_1 = k_1) \cap (Z_2 = k_2) \cap ... \cap (Z_q = k_q)) = \frac{p!}{k_1! k_2! ... k_q!} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} ... \alpha_q^{k_q}$$

Let Z be such. Prove that the conditional law of $(Z_1, Z_2, ..., Z_{q-1})$, given Z_q, is the multinomial law, with parameters $\dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_q}, \dfrac{\alpha_2}{1-\alpha_q}, ..., \dfrac{\alpha_{q-1}}{1-\alpha_q}, \ p - Z_q, \ q-1$. Notice that the support of this conditional law is random.

Exercice 3 Let $(X_1, X_2, ..., X_n)$ be a sequence of n real-valued independent random variables, such that they all follow the same law. Set $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

a) Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Prove that $\mathrm{E}(X_1 f(S_n)) = \mathrm{E}(X_2 f(S_n)) = ... = \mathrm{E}(X_n f(S_n))$.

b) Deduce that $\mathrm{E}(X_1 \mid S_n) = \dfrac{S_n}{n}$.

Exercice 4 Let S_0 be a constant, $0 < d < u$ and X_n be a sequence of independant random variables, valued in $\{u, d\}$, such that for all n, $p(X_n = u) = p$. Let us consider the sequence $(S_n)_{n \geq 1}$ defined by $S_n = X_n S_{n-1}$ for $n \geq 1$. This sequence is a model of a financial asset. Let $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathscr{F}_1 = \sigma(X_1)$, $\mathscr{F}_2 = \sigma(X_1, X_2)$.

1. Prove that $\sigma(S_2) \neq \mathscr{F}_2$.
2. Calculate $\mathrm{E}(S_2 \mid \mathscr{F}_1)$ and $\mathrm{E}(S_2 \mid \mathscr{F}_0)$, and verify that $\mathrm{E}(\mathrm{E}(S_2 \mid \mathscr{F}_1) \mid \mathscr{F}_0) = \mathrm{E}(S_2)$.
3. If $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}(X_1, X_2, ..., X_n)$, give a formula for $\mathrm{E}(S_n \mid \mathscr{F}_k)$ for every $k \leq n$

Exercice 5 Suppose $(\forall \omega)$ $p(\{\omega\}) > 0$. Put $|\Omega| = n$. Let $\mathscr{V}$ be the vector space of real random variables on Ω, and $\mathscr{V}_Z$ be the subset of $\mathscr{V}$ comprising the deterministic functions of Z. Put $|Z(\Omega)| = p$.

1. Let the scalar product on $\mathscr{V}$ be defined as $\langle X, Y \rangle = \mathrm{E}(XY)$; what is the dimension of the euclidian space thus defined ? What is the dimension of the sub vector space $\mathscr{V}_Z$?
2. Suppose $X \in \mathscr{V}$; prove that $\mathrm{E}(X \mid Z)$ is the euclidian projection of X on $\mathscr{V}_Z$.
3. Let us call $\mathscr{R}_Z$ the sub space of $\mathscr{V}$ comprising the real random variables affine functions of Z. What is its dimension ? Prove that the euclidian projection $R(X \mid Z)$ of X on $\mathscr{R}_Z$ is given by
$$Y = \mathrm{E}(X) + r(Z - \mathrm{E}(Z))$$
where $r = \dfrac{\mathrm{cov}(X, Z)}{\mathrm{V}(Z)}$.
4. Prove without any calculation that $\mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X \mid Z))^2) \leq \mathrm{E}((X - R(X \mid Z))^2)$.
5. Prove that $\mathrm{E}(X \mid Z) = R(X \mid Z)$ if $|Z(\Omega)| = 2$.

Exercice sur la fortune d'un joueur

[VII.153-155, IX.68,78, X.166-174] Deux joueurs possédant initialement des fortunes de r et k dollars respectivement (r et k sont des entiers positifs), misent et jouent jusqu'à la ruine de l'un d'eux. Le deuxième joueur représente le croupier tandis que le premier joueur détermine la mise. Il gagne sa mise avec probabilité p $(0 < p < 1)$ ou la perd avec probabilité $q = 1-p$, et ce, indépendamment de l'histoire du jeu. Les seules mises possibles sont des multiples d'un dollar et il n'y a pas d'emprunt possible. Etudions deux stratégies populaires :

1. L'approche *audacieuse* consiste pour le premier joueur à miser à chaque tour le minimum entre sa fortune personnelle et le montant requis pour sa victoire ;
2. L'approche *timide* consiste pour le premier joueur à miser un euro à chaque tour.

On note X_n la fortune du premier joueur après le $n^{\text{ème}}$ jeu. Le but de cet exercice est de comparer les deux stratégies en calculant des espérances.

Partie I Soit $N, k \in \mathbb{N}$. Jacques possède $r = 10$ € et décide de jouer N fois de suite à pile ou face contre un collègue très riche. La pièce utilisée n'est pas parfaitement équilibrée, la probabilité de tomber sur pile est $p = \frac{2}{5}$, mais Jacques ne le sait pas. A chaque lancer, tant qu'il a encore de l'argent, il mise 1 € sur pile. Il espère ainsi gagner k € (c'est-à-dire atteindre une fortune totale de $10+k$ €), après quoi il arrêtera de miser.

a) On note X_n la fortune de Jacques après n lancers, et $X_0 = 10$. Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov, et en déterminer la matrice stochastique.

b) Si Jacques parvient effectivement à gagner k €, pour la première fois, au n-ème lancer, on note $T = n$. Si au contraire il n'y est pas parvenu au terme des N lancers, on note $T = +\infty$. Autrement dit, T est une variable aléatoire que l'on peut définir ainsi :

$$T = \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = 10+k\}$$

Soit $n \in [\![0, N-1]\!]$. Montrer que :

$$(\forall a \in [\![0, 10+k]\!]) \quad p(T \leq n+1 \mid X_1 = a) = p(T \leq n \mid X_0 = a)$$

Puis montrer que :

$$(\forall a \in [\![1, 9+k]\!]) \quad p(T \leq n+1 \mid X_0 = a) = \frac{2}{5} p(T \leq n \mid X_0 = a+1) + \frac{3}{5} p(T \leq n \mid X_0 = a-1)$$

c) Pour $n \in [\![0, N]\!]$, $p(T \leq n \mid X_0 = a)$ ne dépend donc pas de N. Pour un tel n, notons :

$$f_n(a) = p(T \leq n \mid X_0 = a)$$

Afin d'étudier la probabilité de gagner k € lorsque N est grand, on va faire varier N. Pour tout $a \in [\![0, 10+k]\!]$, on a ainsi défini une suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$, et la question précédente montre que :

$$(\star) \qquad f_{n+1}(a) = \frac{2}{5} f_n(a+1) + \frac{3}{5} f_n(a-1)$$

Pour tout a, la suite $(f_n(a))$ est une suite croissante majorée par 1, donc elle a une limite finie

$$p_a = \lim_{n\to\infty} f_n(a)$$

Si l'on fait tendre n vers l'infini dans l'équation $(\star)$, on obtient à la limite :

$$p_a = \frac{2}{5} p_{a+1} + \frac{3}{5} p_{a-1}$$

Montrer que $p_0 = 0$ et $p_{10+k} = 1$. En déduire que

$$p_a = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^a - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{10+k} - 1}$$

d) En s'aidant de la question précédente, donner une valeur approchée de la probabilité ρ de gagner k € (c'est-à-dire d'atteindre une fortune totale de $10+k$ €) lorsque N est très grand.

e) On suppose N assez grand, tel que cette limite ρ soit une bonne approximation au moins pour les petites valeurs de k. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $\rho > 0,5$.

f) On pose désormais $k = 1$. On note $(\mathscr{F}_n)$ la filtration naturelle engendrée par la suite (X_n). Soit $n \in [\![0, N-1]\!]$. Calculer :

$$\mathrm{E}(X_{n+1} - X_n \mid \mathscr{F}_n)$$

(on exprimera le résultat en fonction de l'indicatrice $\mathbb{1}_{X_n \in [\![1,10]\!]}$). En déduire que

$$\mathrm{E}(X_{n+1} - 10) = \mathrm{E}(X_n - 10) - \frac{1}{5} p(X_n \in [\![1, 10]\!])$$

Pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, on pose

$$u_n = p(X_n \in [\![1, 10]\!])$$

$$v_n = \mathrm{E}(X_n - 10)$$

On remarque que ces deux quantités ne dépendent pas de N. Le but de cette question est de calculer l'espérance de gain de Jacques au terme des N lancers, pour N grand. On va donc faire varier N. On a ainsi défini deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite (v_n) est décroissante et minorée par (-10) donc elle a une limite $\ell \in \mathbb{R}$. En déduire les deux limites suivantes :

$$\lim_{N\to+\infty} p(X_N \in [\![1, 10]\!]) = 0$$

$$\lim_{N\to+\infty} p(X_N = 0) + p(X_N = 11) = 1$$

Puis montrer que :

$$p(X_N = 11) = p(T \leq N)$$

Supposons N assez grand pour qu'on ait $p(X_N \in [\![1, 10]\!]) \simeq 0$. Calculer alors le gain espéré $\mathrm{E}(X_N - 10)$.

Partie II Adapter les raisonnements précédents à la stratégie *audacieuse*. Dans le cas où $p = \dfrac{2}{5}$, $r = 10$ et $k = 40$, montrer que le gain espéré de la stratégie audacieuse est -4,57 €, et que celui de la stratégie timide est presque -10 €.

Jacques and Simon

Jacques owns r euros and Simon owns k euros (r and k are non-negative integers). They play together : Jacques bets. He wins his bet with probability p, or looses it with probability $(1-p)$. Jacques bets again, and again, and the game repeats itself until one of them has lost all his money. Every time, the bet must be an non-negative integer amount of euros. Each draw is independant of the past. There are two famous strategies for this game :

1. The *bold* strategy : Jacques always bets the minimum amount between his ownings and the amount requested for immediate winning;
2. The *shy* strategy : Jacques always bets only one euro.

Let X_n be the amount owned by Jacques after the n^{th} game. The aim of this exercise is to compare both strategies through expectations.

Part I Let $N \in \mathbb{N}$, $r = 10$ €, $p = \dfrac{2}{5}$. Jacques is playing the *shy* strategy. Let us consider only, at most, the first N games. Let $X_0 = 10$.

a) Prove that (X_n) is a Markov chain and give its stochastic matrix.

b) If Jacques reaches $10+k$, at first, at the nth game, set $T = n$. If he does never reach it during the first N games, set $T = +\infty$. Then T is a random variable that we could define as such :

$$T = \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = 10+k\}$$

Let $n \in [\![0, N-1]\!]$. Prove that :

$$(\forall a \in [\![0, 10+k]\!]) \quad p(T \leq n+1 \mid X_1 = a) = p(T \leq n \mid X_0 = a)$$

Then prove that :

$$(\forall a \in [\![1, 9+k]\!]) \quad p(T \leq n+1 \mid X_0 = a) = \frac{2}{5} p(T \leq n \mid X_0 = a+1) + \frac{3}{5} p(T \leq n \mid X_0 = a-1)$$

c) For $n \in [\![0, N]\!]$, $p(T \leq n \mid X_0 = a)$ doesn't depend upon N; set

$$f_n(a) = p(T \leq n \mid X_0 = a).$$

In order to study the probability of reaching $10+k$ € when N is very large, one considers N as a variable. For all $a \in [\![0, 10+k]\!]$, one has thus defined a sequence $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$, and the previous question proves that :

$$(\star) \qquad f_{n+1}(a) = \frac{2}{5} f_n(a+1) + \frac{3}{5} f_n(a-1)$$

For all a, the sequence $(f_n(a))$ is an increasing sequence, upper bounded by 1; it thus has a finite limit

$$p_a = \lim_{n\to\infty} f_n(a)$$

Using $(\star)$, one has :

$$p_a = \frac{2}{5} p_{a+1} + \frac{3}{5} p_{a-1}$$

Montrer que $p_0 = 0$ et $p_{10+k} = 1$. En déduire que

$$p_a = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^a - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{10+k} - 1}$$

d) Using the previous question, give an estimate of the probability ρ of reaching $10+k$ € when N is very large.

e) Suppose N large enough for this result to be good estimate at least for small values of k. Calculate the maximum value of k such that $\rho > 0.5$.

f) Put now $k = 1$. Let $(\mathscr{F}_n)$ be the natural filtration generated by sequence (X_n). Let $n \in [\![0, N-1]\!]$. Calculate :

$$\mathrm{E}(X_{n+1} - X_n \mid \mathscr{F}_n)$$

(express it in terms of the indicatrix $\mathbb{1}_{X_n \in [\![1,10]\!]}$). Deduce that

$$\mathrm{E}(X_{n+1} - 10) = \mathrm{E}(X_n - 10) - \frac{1}{5} p(X_n \in [\![1, 10]\!])$$

For all $n \in [\![0, N]\!]$, set

$$u_n = p(X_n \in [\![1, 10]\!])$$

$$v_n = \mathrm{E}(X_n - 10)$$

Both of those quantities do not depend upon N. The aim of this question is to calculate the expectation of gain of Jacques after N games, for very large N. With N varying, one has thus defined two sequences $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sequence (v_n) is decreasing, lower bounded by (-10), it thus has a limit $\ell \in \mathbb{R}$. Deduce that :

$$\lim_{N\to+\infty} p(X_N \in [\![1, 10]\!]) = 0$$

$$\lim_{N\to+\infty} p(X_N = 0) + p(X_N = 11) = 1$$

Then prove that :

$$p(X_N = 11) = p(T \leq N)$$

Suppose N large enough such that $p(X_N \in [\![1, 10]\!]) \simeq 0$; calculate the expectation of gain $\mathrm{E}(X_N - 10)$.

Part II Work in the same way with the *bold* strategy. When $p = \frac{2}{5}$, $r = 10$ et $k = 40$, prove that the expectation of gain is -4,57 € with the *bold* strategy, and almost -10 € with the *shy* strategy.

Chaînes de Markov

Exercice 1 On considère n menteurs $I_1, \ldots, I_n$. I_1 reçoit une information sous la forme « oui » ou « non », la transmet à I_2, ainsi de suite jusqu'à I_n, et I_n l'annonce en public. Chacun transmet ce qu'il a entendu avec probabilité p, ou bien le contraire avec probabilité $1-p$; les probabilités que chacune des n personnes mente sont indépendantes. Calculer la probabilité p_n pour que l'information soit fidèlement transmise. Que se passe-t-il lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 2 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de deux urnes U_1 et U_2 et de n boules numérotées de 1 à n, réparties initialement entre U_1 et U_2. On procède à des expériences selon le déroulement suivant : on choisit un nombre au hasard dans $[\![1, n]\!]$, la boule dont le numéro a été tiré est alors changée d'urne avec la probabilité p ($p \in]0, 1[$), et maintenue dans la même urne avec la probabilité $1-p$.

On répète cette expérience N fois et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après la réalisation de la $k^{\text{ème}}$ expérience. Soit $(\mathscr{F}_k)$ la filtration naturelle associée à la suite (X_k).

Après chaque tirage, le joueur gagne un euro si le nombre de boules contenues dans U_1 dépasse un certain seuil s ($1 \leq s \leq n$).

1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et $i, j \in [\![0, n]\!]$, calculer $p(X_{k+1} = i \mid X_k = j)$.
2. Montrer que le gain au $k^{\text{ème}}$ tirage est $f(X_k) = \mathbb{1}_{X_k \geq s}$.
3. Calculer $E(f(X_{k+1}) \mid \mathscr{F}_k)$.

Martingales

Exercice 1 [VII.155] Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées avec $(p(Y_i=1)=p=1-p(Y_i=-1)$. Soit $S_n=\sum_1^n Y_i$ et $S_0=0$. Montrer que les suites (W_n) et (M_n) définies par

$$W_n=S_n-(2p-1)n, \qquad W_0=0, \qquad M_n=\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}, \qquad M_0=1$$

sont des martingales par rapport à la filtration naturelle associée à (Y_n).

Exercice 2 Soit $a\in\mathbb{R}_+^\star$ et $p\in]0,1[$. On considère la suite $(S_n)_{0\leq n\leq N}$ définie par récurrence :

$$S_0=100$$

$$S_{n+1}=\begin{cases} S_n a & \text{avec la probabilité } p \\ S_n/a & \text{avec la probabilité } 1-p \end{cases}$$

1. Pour $a=1,05$ et $p=1/3$, (S_n) est-elle une martingale ? une sous-martingale ? une sur-martingale ?
2. Si $a=1,05$, pour quelle(s) valeur(s) de p la suite (S_n) est-elle une martingale ?
3. Si $a=1,05$, pour quelle(s) valeur(s) de p la suite $(\ln S_n)$ est-elle une martingale ? Pour cette(ces) valeur(s) de p, montrez que toute martingale (M_n) est une transformée de $(\ln S_n)$.

Exercice 3 Soit ϵ_1, ϵ_2, ... des variables aléatoires indépendantes, chacune d'espérance nulle et de variance $\mathrm{V}(\epsilon_i)=\sigma_i^2$. Posons

$$S_n=\sum_{i=1}^n \epsilon_i, \qquad T_n^2=\sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

Montrez que $S_n^2-T_n^2$ est une martingale.

Exercice 4 Soit $(\Omega,p,(\mathscr{F}_n))$ un espace filtré et Y une variable aléatoire. On pose

$$X_n=\mathrm{E}(Y\mid\mathscr{F}_n)$$

Montrer que (X_n) est une martingale.

Exercice 5 Si (X_n) et (Y_n) sont des sous-martingales, montrer que $(\max(X_n,Y_n))$ est une sous-martingale.

Martingales

Exercice 1 [VII.155] Let $(Y_n)_{n\geq 1}$ be a sequence of independant random variables with same law of probability $(p(Y_i=1)=p=1-p(Y_i=-1)$. Let $S_n=\sum_1^n Y_i$ and $S_0=0$. Prove that the sequences (W_n) and (M_n) defined by

$$W_n = S_n-(2p-1)n, \qquad W_0=0, \qquad M_n=\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}, \qquad M_0=1$$

are martingales with respect to the natural filtration associated with (Y_n).

Exercice 2 Let $a\in\mathbb{R}_+^\star$ and $p\in]0,1[$. Let $(S_n)_{0\leq n\leq N}$ be defined by recurrence :

$$S_0=100$$

$$S_{n+1}=\begin{cases} S_n a \text{ with probability } p\\ S_n/a \text{ with probability } 1-p\end{cases}$$

1. When $a=1.05$ and $p=1/3$, is (S_n) a martingale ? a submartingale ? a supermartingale ?
2. When $a=1.05$, for which value(s) of p is the sequence (S_n) a martingale ?
3. When $a=1.05$, for which value(s) of p is the sequence $(\ln S_n)$ a martingale ? In this case, prove that any martingale (M_n) is a transform of $(\ln S_n)$.

Exercice 3 Let ϵ_1, ϵ_2, ... be independant random variables with expectation zero and variance $\mathrm{V}(\epsilon_i)=\sigma_i^2$. Suppose

$$S_n=\sum_{i=1}^n \epsilon_i, \qquad T_n^2=\sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

Prove that $S_n^2-T_n^2$ is a martingale.

Exercice 4 Let $(\Omega, p, (\mathscr{F}_n))$ be a probability space with a filtration, and Y a random variable. Suppose

$$X_n=\mathrm{E}(Y\mid\mathscr{F}_n)$$

Prove that (X_n) is a martingale.

Exercice 5 If (X_n) and (Y_n) are submartingales, prove that $(\max(X_n,Y_n))$ is a submartingale.

Options et modèles discrets

Exercice 1 Dans un marché financier avec un actif risqué $(S_n)_{0\leq n\leq N}$, soit $\psi(S_N)$ une variable aléatoire fonction de S_N (en particulier, une telle variable est $\mathscr{F}_N$-mesurable). Si $\psi(S_N)$ représente la valeur à la date N d'un certain actif financier, on appelle *profil de gain* de $\psi(S_N)$ la courbe d'équation $S_N \longmapsto \psi(S_N)$. Représentez le profil de gain d'un *put* européen sur l'actif (S_n) au prix d'exercice K, si :

1. Vous êtes en « position longue » (c'est-à-dire que vous achetez le *put*).
2. Vous êtes en « position courte » (c'est-à-dire que vous vendez le *put*).

Puis représentez le profil de gain d'un portefeuille constitué d'un *call* et d'un *put* à l'européenne de mêmes date d'exercice N et prix d'exercice K, et portant sur le même actif (S_n).

Exercice 2 Le taux sans risque à un an est de 4 % et l'indice boursier Duralex est de $S_0 = 100$. Un *call* européen à un an sur l'indice Duralex au prix d'exercice de $K = 104$ est côté 8 % de la valeur actuelle de l'indice. Vous souhaitez investir un million d'euros sur un an $(N = 1)$. Vous prévoyez d'investir suffisamment de cet argent dans des bons du Trésor sans risque pour récupérer au moins votre million d'euros dans un an, et le solde sera investi dans l'achat de *calls* sur Duralex.

1. On suppose que vous pouvez investir dans des fractions d'options. On appelle *taux de rentabilité* d'un portefeuille ϕ le taux :
$$\frac{V_N(\phi) - V_0(\phi)}{V_0(\phi)}$$
Calculez le taux de rentabilité de votre portefeuille. C'est une fonction de S_N ; tracez son profil de gain en plaçant l'indice Duralex sur l'axe horizontal et le taux de rentabilité sur l'axe vertical. Quelle est la pente du segment à droite de la valeur 104 de l'indice ?
2. Si vous pensez qu'il y a un probabilité de $0,5$ que l'indice Duralex soit supérieur de 12 % dans un an, une probabilité de $0,25$ qu'il ait progressé de 40 %, et une probabilité de $0,25$ qu'il ait baissé de 20 %, quelle est la loi de probabilité de la rentabilité de votre portefeuille ?

Exercice 3 Un *actif synthétique* est un portefeuille répliquant un actif donné. La relation de parité *put-call* permet non seulement de déduire la valeur d'un des quatre actifs (l'actif sans risque, l'actif sous-jacent, le *put* et le *call*) à partir des trois autres, mais elle peut aussi être utilisée comme une « recette » pour créer un actif synthétique à partir des trois autres.

1. Montrez comment on peut bâtir une action synthétique avec un *put*, un *call* et un actif sans risque.
2. Montrez comment on peut répliquer un actif sans risque à un an à la valeur nominale de 100 euros avec une action, un *put* et un *call*.
3. Pour répliquer un actif sans risque à un an à la valeur nominale de 100 euros, on utilise un actif sous-jacent de valeur 100, un *put* qui vaut 10 et un *call* qui vaut 15 euros. Quel doit être le taux sans risque à un an ?
4. Montrez que si le taux sans risque est inférieur à la réponse précédente, il y aura opportunité d'arbitrage.

Exercice 4 Prenons un *call* à neuf mois, au prix d'exercice de 100 euros. Le cours de l'action sous-jacente est actuellement égal à 100 euros. Pour simplifier, prendre un taux sans risque égal à 0. On adopte un modèle « binomial » pour décrire les variations du cours de l'action : on divise l'année en sous-périodes de trois mois chacune, et on considère que l'action peut monter ou baisser de 10 euros à chaque sous-période. Ainsi, la variation maximum du cours de l'action sera de 30 euros, à la hausse ou à la baisse. Trouvez une stratégie d'investissement autofinancée qui réplique les gains de l'option. Montrez qu'à chaque sous-période, la quantité d'actif sous-jacent à acheter dépend du *ratio de couverture* égal à la différence entre les deux gains possibles de l'option, divisée par la différence entre les deux valeurs possibles de l'action à la sous-période suivante :

$$\text{ratio de couverture} = \frac{\text{amplitude des valeurs de l'option}}{\text{amplitude des valeurs de l'action}}$$

Exercice 5 Prenons un *call* européen à un an, au prix d'exercice de 55 euros. Le cours de l'action sous-jacente est actuellement égal à 50 euros. On suppose que le taux sans risque est nul. On adopte un modèle de Cox-Ross-Rubinstein pour décrire les variations du cours de l'action : on divise l'année en deux périodes de six mois, et on considère que le sous-jacent subit une variation de ± 10 % à chaque période. A quel prix vendriez-vous ce *call* ? Trouvez une stratégie de couverture.

Exercice 6 Soit un marché financier discret viable et complet avec un seul actif risqué $(S_n)_{0 \leq n \leq N}$,

$$S_n = s_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \quad (\forall n)$$

où les variables aléatoires Y_i sont deux à deux indépendantes et de même loi. Montrez qu'alors

$$(\forall i) \quad |Y_i(\Omega)| = 2$$

Options in Discrete Markets

Exercice 1 In a financial market with a risky asset $(S_n)_{0\leq n\leq N}$, let $h = \Psi(S_N)$ be a random variable, deterministic function of S_N. Then h is $\mathscr{F}_N$-measurable. If h is the value at time N of a financial asset, the "payoff diagram" of h is the curve $y = \Psi(x)$. Suppose h is a "European put" on the underlying asset (S_n) with strike price K and maturity N, that is to say :

$$h = (K - S_N)_+ = \max(0, K - S_N)$$

1. Draw the payoff diagram of such an option.
2. Draw the payoff diagram of a "short put" (*i. e.* if one has sold such an option ; as opposed to owning a "long put", *i. e.* having bought such an option).
3. A European call on the underlying (S_n) with strike K and maturity N is defined as

$$(S_N - K)_+ = \max(0, S_N - K)$$

Draw the payoff diagram of a portfolio containing one long call and one long put with same strike and maturity, on the same underlying.

Exercice 2 The rate of return of the riskless asset is 4 % per year. The Duralex stock index is $S_0 = 100$ at time 0. A European call on the Duralex index with strike $K = 104$ and maturity $N = 1$ year is issued at a price equal to 8 % of the actual value of the index.

You own 1 M€ ; you want to save enough on a riskless account to get back at least your million euros in one year. To invest the rest of it, you decide to buy calls on Duralex.

1. Suppose you can invest in fractions of an option. The "rate of return" of a portfolio ϕ is the rate

$$\frac{V_N(\phi) - V_0(\phi)}{V_0(\phi)}.$$

What is the rate of return of your portfolio ? It is a deterministic function of S_N ; draw its payoff diagram. What is the slope of the diagram on the right-hand side ?

2. Suppose the law of $\dfrac{S_1 - S_0}{S_0}$ is

$$p\left(\frac{S_1 - S_0}{S_0} = r\right) = \begin{cases} 0.5 \text{ if } r = 12\% \\ 0.25 \text{ if } r = 40\% \\ 0.25 \text{ if } r = -20\% \end{cases}$$

What is the law of probability of the rate of return of your portfolio ?

Exercice 3 The "put-call parity relation" is a relation between the values of an asset, a call on this asset, and a put on this asset, with same strike and maturity. At maturity, the put-call parity is easy to establish :

$$(K - S_N)_+ + S_N = K + (S_N - K)_+$$

In a viable market, discounting cash flows, this same relation holds at any time n. Let C_n be the price of the call at time n, and P_n the price of the put. Then one has :

$$\widetilde{P_n} + \widetilde{S_n} = K\beta_N + \widetilde{C_n}$$

Usually, this relation enables one to calculate the value of any of the four assets (riskless asset, underlying asset, call and put) knowing the other three.

The put-call parity could also be used as a device to create a "synthetic asset", *i. e.* a portfolio replicating one of the four assets using the other three.

1. Show how to build a synthetic underlying asset with a put, a call and a riskless asset.
2. Show how to replicate a riskless asset with value 100 € in one year, using put, call, and underlying asset.
3. In order to replicate a riskless asset with value 100 € in one year, one uses an underlying worth 100 €, a put worth 10, and a call worth 15 €. What must be the riskless interest rate ?
4. Prove that, if the riskless rate is less than that, then there exists an arbitrage.

Exercice 4 Consider a European call h with strike 100 € and maturity 9 months from now. Today, the price of the underlying asset is 100 €. Suppose the riskless rate of interest is 0 %. The price variation of the underlying asset is modelized in a very basic way : dividing the year in periods of three months, we suppose the price of the asset is liable to increase or decrease of 10 € from one period to the next. Thus, the utmost variation per year is ±30 €.

1. Describe the probability space Ω using a binary tree.
2. Find a probability measure $p^\star$ such that the present value of the underlying is a martingale.
3. Suppose ϕ is an admissible strategy "attaining" the call option, *i. e.* an admissible strategy such that

$$V_N(\phi) = h$$

   Prove that $\widetilde{V_n}(\phi)$ is a martingale under $p^\star$.
4. Iterating the trees from leaves to root, and calculating for any n the conditional expectation under $p^\star$

$$\mathrm{E}(\widetilde{V_n}(\phi) \mid \mathscr{F}_{n-1})$$

   calculate $V_0(\phi)$.
5. Find a convenient formula for the number ϕ_n of underlying assets in ϕ at time n, using conditional expectations given $\mathscr{F}_{n-1}$. Check that the sequence (ϕ_n) is a predictable sequence.
6. Thinking in terms of arbitrage, prove that $V_0(\phi)$ must be the price of the call option at time 0.
7. Prove that, under $p^\star$,

$$V_0(\phi) = \beta_N \mathrm{E}(h)$$

Exercice 5 Consider a European call h with strike 55 € and maturity 1 year from now. Today, the price of the underlying asset is 50 €. Suppose the riskless rate is 0 %. Describe the variations of the price of the underlying asset, dividing the year in two periods of six months, and suppose the price of the underlying is liable to increase or decrease of ±10 % from one period to the next. At what price should you sell such a call option ? Describe a "hedging", *i. e.* an admissible strategy in order to generate an amount h at time N (it is the amount that you will have to give at time N if you have sold such a call option to someone...).

Exercice 6 Consider a viable complete discrete financial market with only one risky asset $(S_n)_{0\le n\le N}$,

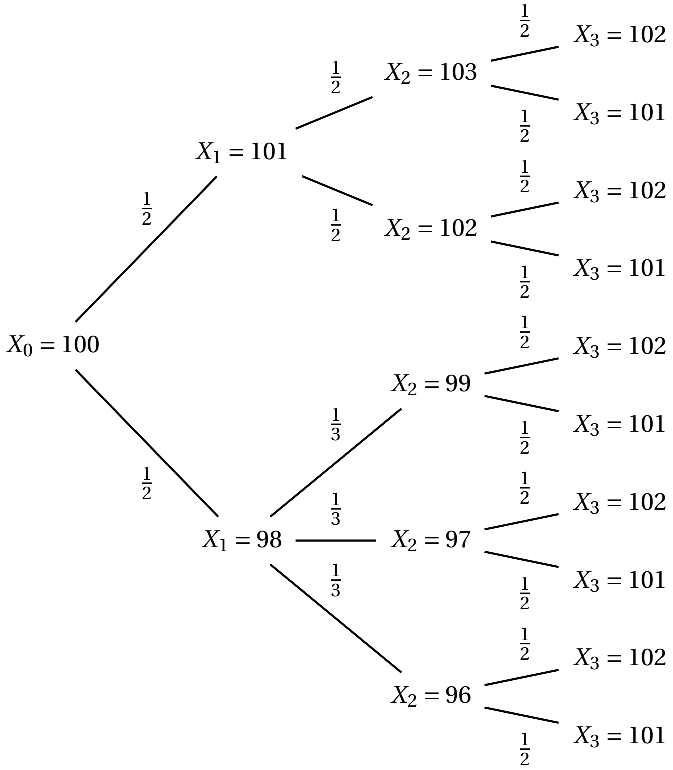
$$S_n = s_0 + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \quad (\forall n)$$

where the random variables Y_i are independant and all have the same law. Prove that

$$(\forall i) \quad |Y_i(\Omega)| = 2$$

Enveloppe de Snell et temps d'arrêt

Exercice Calculez l'enveloppe de Snell et le premier temps d'arrêt optimal de la suite $(X_n)_{0\leq n\leq 3}$ représentée par l'arbre ci-dessous.



Cox-Ross-Rubinstein and Black-Scholes

Consider a Cox-Ross-Rubinstein market (see course).

1) Show that the present value $(\widetilde{S_n})$ is a martingale under p if and only if $\mathrm{E}(T_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = 1 + r$ for all $n \leq N - 1$.
2) Deduce that r must belong to $]a, b[$ for the market to be viable.
3) Give examples of arbitrage if the viability condition derived in the previous question is not satisfied.
4) From now on, we assume that $r \in]a, b[$ and we write $p = (b - r)/(b - a)$. Show that $(\widetilde{S_n})$ is a martingale if and only if the random variables T_1, T_2,..., T_N are independant and they all have the same law of probability given by $p(T_1 = 1 + a) = p$. Conclude that the market is viable and complete.
5) We denote by C_n (resp. P_n) the value at time n, of a European call (resp. put) on the risky asset, with strike price K and maturity N.
6) (i) Prove the put/call parity relation.
   (ii) Show that we can write $C_n = c(n, S_n)$ where c is a function of K, a, b, r and p.
7) Show that the strategy attaining the call option is characterised by a quantity $\phi_n = \Delta(n, S_{n-1})$ at time n, where Δ will be expressed as a ratio in terms of function c.
8) We can now use the model to price a call or a put with maturity T in a continuous market. In order to do that, we study the asymptotic case when N converges to infinity. We define R and σ such that :

$$r = \frac{RT}{N}, \quad \ln\left(\frac{1+a}{1+r}\right) = -\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad \ln\left(\frac{1+b}{1+r}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

The real number R is interpreted as the instantaneous rate at all times between 0 and T, because $\exp(RT) = \lim_{N \to +\infty} (1+r)^N$. The quantity σ^2 can be seen as the limit variance, under measure $p^\star$, of the variable $\ln(S_N)$, when N converges to infinity.

   (i) Let $(Y_N)_{N \geq 1}$ be a sequence of random variables equal to

$$Y_N = X_1^N + X_2^N + \ldots + X_N^N$$

   where the random variables X_i^N all have the same law,

$$X_i^N(\Omega) = \left\{ -\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, +\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right\},$$

   and their mean is equal to μ_N, with $\lim_{N \to \infty} (N\mu_N) = \mu$. Show that, under some independance hypothesis, the sequence (Y_N) converges in distribution towards a Gaussian variable with parameters (μ, σ).

   (ii) Give explicitly the asymptotic prices of the put and the call at time 0.

L'intégrale stochastique [X.42-51]

Exercice 1 Soit (X_t) un *mouvement brownien standard*, avec $X_0 = 0$ et X_t suivant une loi normale de paramètres $(0, \sqrt{t})$.

a) Montrer que, si une trajectoire $t \to X_t$ est dérivable en 0, alors $\dfrac{X_t}{t}$ a une limite en 0.

b) Pour $M \in]0, +\infty[$ quelconque, calculer

$$p\left(\left|\frac{X_t}{t}\right| \text{ ait une limite inférieure à } M \text{ quand } t \text{ tend vers } 0\right)$$

c) Soit $0 \leq a < b$. Montrer que

$$p\,(t \to X_t \text{ soit dérivable en } a)$$

$$p\,(t \to X_t \text{ soit dérivable sur l'intervalle } [a, b]) = 0$$

Exercice 2 Il s'agit de construire une intégrale du type $\int_0^{+\infty} f(s)\mathrm{d}X_s$, où $(X_t)_{t\geq 0}$ est un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien standard et $f(s)$ est une fonction mesurable de $(\mathbb{R}^+, \mathscr{B}(\mathbb{R}^+))$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ telle que :

$$\int_0^{+\infty} f^2(s)\mathrm{d}s < +\infty.$$

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{H}$ des fonctions de la forme $\sum_{0\leq i\leq N-1} a_i \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}$, avec $a_i \in \mathbb{R}$, et $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_N$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}s)$ muni de la norme $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(s)\mathrm{d}s}$.

1. Soit $a_i \in \mathbb{R}$, et $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_N$, et $f = \sum_{0\leq i\leq N-1} a_i \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}$. On pose :

$$I_e(f) = \sum_{0\leq i\leq N-1} a_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}).$$

   Démontrer que $I_e(f)$ est une variable aléatoire gaussienne dont on calculera la moyenne et la variance. Démontrer en particulier que :

$$\mathrm{E}(I_e(f)^2) = \|f\|_{L^2}^2.$$

2. En déduire qu'il existe une unique application linéaire I de $L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}x)$ à valeurs dans $L^2(\Omega, \mathscr{A}, p)$ telle que $I(f) = I_e(f)$ si f est dans $\mathscr{H}$, et que $\mathrm{E}(I(f)^2) = \|f\|_{L^2}^2$ pour tout f dans $L^2(\mathbb{R}^+)$.
3. Démontrer que, si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes centrées qui convergent dans $L^2(\Omega, \mathscr{A}, p)$ vers X, alors X est une variable aléatoire gaussienne centrée. En déduire que si $f \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}x)$ alors $I(f)$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\int_0^{+\infty} f^2(s)\mathrm{d}s$.
4. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}x)$, on note $Z_t = \int_0^t f(s)\mathrm{d}X_s = \int \mathbb{1}_{]0,t]}(s) f(s)\mathrm{d}X_s$, démontrer que Z_t est un processus adapté à $\mathscr{F}_t$, et que $Z_t - Z_s$ est indépendant de $\mathscr{F}_s$ (commencer par traiter le cas $f \in \mathscr{H}$).
5. Démontrer que les processus Z_t, $Z_t^2 - \int_0^t f^2(s)\mathrm{d}s$, $\exp(Z_t - (1/2)\int_0^t f^2(s)\mathrm{d}s)$ sont des $\mathscr{F}_t$-martingales.

The stochastic integral

Exercice 1 Let (X_t) be a *standard Brownian motion*, with $X_0 = 0$ and X_t being a normal variable with parameters $(0, \sqrt{t})$.

a) Prove that, if the path $t \to X_t$ is derivable at $t = 0$, then $\dfrac{X_t}{t}$ has a limit when t converges to 0.

b) For all $M \in \,]0, +\infty[$, calculate

$$p\left(\left|\frac{X_t}{t}\right| \text{ has a limit less than } M \text{ when } t \text{ converges to } 0\right)$$

c) Let $0 \le a < b$. Prove that

$$p\,(t \to X_t \text{ is derivable in } a)$$

$$p\,(t \to X_t \text{ is derivable on } [a,b]) = 0$$

Exercice 2 We want to build an integral of the form $\int_0^{+\infty} f(s)\mathrm{d}X_s$, where $(X_t)_{t\le 0}$ is a standard $\mathscr{F}_t$-Brownian motion and $f(s)$ is a measurable function from $(\mathbb{R}^+, \mathscr{B}(\mathbb{R}^+))$ into $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ such that $\int_0^{+\infty} f^2(s)\mathrm{d}s < +\infty$. We recall that the set $\mathscr{H}$ of functions of the form $\sum_{0\le i\le N-1} a_i \mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}$, with $a_i \in \mathbb{R}$, and $t_0 = 0 \le t_1 \le \ldots \le t_N$ is dense in the space $L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}x)$ endowed with the norm $\|f\|_{L^2} = \left(\int_0^{+\infty} f^2(s)\mathrm{d}s\right)^{1/2}$.

1. Consider $a_i \in \mathbb{R}$, and $0 = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_N$, and call

$$f = \sum_{0\le i\le N-1} a_i \mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}.$$

   We define

$$I_e(f) = \sum_{0\le i\le N-1} a_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}).$$

   Prove that $I_e(f)$ is a normal random variable and compute its mean and variance. In particular, show that

$$\mathrm{E}(I_e(f)^2) = \|f\|_{L^2}^2.$$

2. From this, show that there exists a unique linear mapping I from $L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}x)$ into $L^2(\Omega, \mathscr{A}, p)$, such that $I(f) = I_e(f)$, when f belongs to $\mathscr{H}$ and $\mathrm{E}(I(f)^2) = \|f\|_{L^2}^2$, for any f in $L^2(\mathbb{R}^+)$.
3. Prove that if $(X_n)_{n\ge 0}$ is a sequence of normal random variables with zero-mean which converge to X in $L^2(\Omega, \mathscr{A}, p)$, then X is also a normal random variable with zero-mean. Deduce that if $f \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}x)$ then $I(f)$ is a normal random variable with zero mean and a variance equal to $\int_0^{+\infty} f^2(s)\mathrm{d}s$.
4. We consider $f \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}s)$, and we define

$$Z_t = \int_0^t f(s)\mathrm{d}X_s = \int \mathbb{1}_{]0,t]}(s) f(s)\mathrm{d}X_s,$$

   prove that Z_t is adapted to $\mathscr{F}_t$, and that $Z_t - Z_s$ is independant of $\mathscr{F}_s$ (hint : begin with the case $f \in \mathscr{H}$).
5. Prove that the processes Z_t, $Z_t^2 - \int_0^t f^2(s)\mathrm{d}s$, $\exp(Z_t - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)\mathrm{d}s)$ are $\mathscr{F}_t$-martingales.

Black et Scholes

Exercice 1 On rappelle que dans le modèle de Black et Scholes, le prix d'un *put* de prix d'exercice K, de date d'exercice T (en années), sur un actif sous-jacent S_0 dont la volatilité (c'est-à-dire l'écart-type du taux de rentabilité) en T années est σ, quand le taux sans risque est R (taux nominal annuel), est donné par la formule

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(Ke^{-RT} - S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2} + \sigma y} \right)_+ e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

On l'exprime d'habitude sous la forme

$$P = Ke^{-RT} F(-d_2) - S_0 F(-d_1)$$

où F est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et d_1 et d_2 valent :

$$d_1 = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\sigma^2}{2} + \ln(\frac{S_0}{K}) + RT \right), \qquad d_2 = d_1 - \sigma$$

1. Utilisez la relation de parité *put-call* pour trouver la formule de Black et Scholes donnant le prix du *call* correspondant.
2. Utilisez la formule de Black et Scholes pour trouver la valeur d'un *call* européen à trois mois sur une action ne versant pas de dividendes et qui est actuellement cotée à 50 dollars. Le prix d'exercice est de 51 dollars, le taux sans risque R (capitalisé en continu) est de 8 % par an, et l'écart-type du taux de rentabilité annuel de l'action est $0,8$.
3. Quelle est la valeur du *put* correspondant ?
4. Plus généralement, soit un actif de prix S_0 et un *call* de prix C_0 sur cet actif et de prix d'exercice K. On suppose que $S_0 = Ke^{-RT}$; montrer qu'on a alors l'approximation suivante :

   $$\frac{C_0}{S_0} \simeq 0,4\sigma$$

   Indication : on utilisera le développement limité de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

   $$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi}} + x\epsilon(x)$$

5. Quelle est la composition du portefeuille initial de réplication de ce *call* ?

Exercice 2 Vous êtes analyste financier chez Paul Benjamin et associés, un courtier de Singapour, et un client vous demande s'il devrait acheter des *calls* européens sur l'action Leviathan, qui se vendent actuellement 30 dollars singapour. Le prix d'exercice est de 50 dollars singapour. Ces options arrivent à échéance dans 25 jours. L'action Leviathan vaut actuellement 55 dollars singapour et la variance estimée de son taux de rentabilité en 25 jours est de 0,40. Le taux sans risque à Singapour est de 5 %. Qu'allez-vous recommander à votre client ?

Exercice 3 On considère une option de la forme $h = f(S_T)$ et on note F la fonction donnant le prix de l'option en fonction du temps et du cours spot.

1. Montrer que si f est croissante (resp. décroissante), $F(t,x)$ est une fonction croissante (resp. décroissante) de x.
2. On suppose f convexe. Montrer que $F(t,x)$ est une fonction convexe de x, une fonction décroissante de t si $r = 0$ et une fonction croissante de σ dans tous les cas (utiliser une inégalité de convexité).
3. On note F_c (resp. F_p) la fonction F obtenue quand $f(x) = (x-K)_+$ (resp. $f(x) = (K-x)_+$). Montrer que $F_c(t,.)$ et $F_p(t,.)$ sont strictement positives pour $t < T$. Étudier les fonctions $F_c(t,.)$ et $F_p(t,.)$ au voisinage de 0 et $+\infty$.

Exercice 4 Calculer, pour un call et un put, le delta, le gamma, le thêta et le véga.

$$F(t) = p(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx, \qquad F(-t) = 1 - F(t)$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLE 1 – Loi normale centrée réduite

Black and Scholes

Exercice 1 In the Black and Scholes model, the price of a European put with strike K, maturity T (in years), and underlying asset S_0 with volatility σ (i.e. the standard deviation of the rate of return) in T years, when the riskless rate is R (nominal rate per year), is given by the formula :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(Ke^{-RT} - S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma y} \right)_+ e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

We usually write it as

$$P = Ke^{-RT} F(-d_2) - S_0 F(-d_1)$$

where F is the cumulative distribution function of the standard normal distribution, and d_1 and d_2 are defined by :

$$d_1 = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\sigma^2}{2} + \ln(\frac{S_0}{K}) + RT \right), \qquad d_2 = d_1 - \sigma$$

1. Use the put-call parity to find a formula giving the price of the call with same parameters.
2. Use Black and Scholes formula to calculate the price of a European call with maturity 3 months and underlying asset $S_0 = 50$ EUR. The strike is 51 EUR, the riskless rate R =8 % per year (under continuous compounding of interest). The standard deviation of the annual rate of return of the underlying is 0.8.
3. How much is the put with same parameters ?
4. Let S_0 be any risky asset. Consider a European call on this asset, with maturity T and strike $K = S_0 e^{RT}$. Suppose the price of the call is C_0 at time 0. Prove that :

   $$\frac{C_0}{S_0} \simeq 0,4\sigma$$

   Hint : using the Taylor series of the cumulative distribution fonction of the standard normal distribution, prove that

   $$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi}} + x\epsilon(x)$$

5. At time 0, what should be the amount of risky asset in a replicating strategy ?

Exercice 2 Someone is selling calls at 30 EUR on a given asset. The strike is 50 EUR. Maturity is in 25 days from now. The risky asset is 55 EUR. Statistics on past quotations reveal an estimated standard deviation of the rate of return of 0.40. The riskless rate is 5 %. Is it a good deal ?

Exercice 3 Consider a European option $h = f(S_T)$. Let us call $F(t,x)$ the price of the option at time t when the price of the underlying is x at time t.

1. Prove that if f is increasing (resp. decreasing), $F(t,x)$ is an increasing (resp. decreasing) function of x.
2. Suppose f is a convex function. Prove that $F(t,x)$ is a convex function of x, a decreasing function of t if $r = 0$, and an increasing function of σ always (use convex inequality).
3. Write F_c (resp. F_p) the function F when $f(x) = (x-K)_+$ (resp. $f(x) = (K-x)_+$). Prove that $F_c(t,.)$ and $F_p(t,.)$ are positive when $t < T$. Study functions $F_c(t,.)$ and $F_p(t,.)$ near 0 and $+\infty$.

Exercice 4 Calculate, for a call and a put, the delta, the gamma, the theta and the vega.

$$F(t) = p(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx, \qquad F(-t) = 1 - F(t)$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLE 2 – Standard normal distribution

Calcul stochastique

Exercice 1 Soit (B_t) un mouvement brownien standard, et a et T des constantes. Calculez l'intégrale stochastique suivante :

$$\int_0^{+\infty} a\mathbb{1}_{]0,T]}(s)\mathrm{d}B_s$$

Exercice 2 Soit (B_t) un mouvement brownien standard. Calculez, pour $T \in]0,+\infty[$:

$$\int_0^T (B_t + t)dB_t + \int_0^T B_t dt$$

Exercice 3 Calculez l'intégrale stochastique suivante. Décrivez vos calculs en détail. (B_t) est un mouvement brownien standard et $T \in\ ]0,+\infty[$.

$$\int_0^T (B_t^2 + \exp(B_t))\mathrm{d}B_t$$

Exercice 4 Soit (W_t) un mouvement brownien tel que $W_t - W_0$ suive une loi normale de paramètres $(rt, \sigma\sqrt{t})$. On considère l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mathrm{d}W_t$$

Montrer que le processus suivant est une solution de cette équation :

$$S_t = s_0 \exp(W_t - \sigma^2 t/2)$$

Indication : exprimez W_t en fonction d'un mouvement brownien standard B_t puis appliquez la formule d'Itô.

Exercice 5 On considère l'équation stochastique $\mathrm{d}X_t = X_t m \mathrm{d}t + X_t s \mathrm{d}B_t$ où (B_t) est un mouvement brownien standard, et $(\mathscr{F}_t)$ est la filtration engendrée par (B_t). Soit (X_t) une solution de cette équation. À t fixé, calculez la densité de probabilité de la variable X_t. Le processus (X_t) est-il une $(\mathscr{F}_t)$-martingale ?

Exercice 6 Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard.

a) Utilisez la formule d'Itô pour exprimer $\displaystyle\int_0^t s dW_s$. *Indication :* trouver f tel que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t$.

b) Appliquez la formule d'Itô à la fonction $f(x) = x^3$. Le processus W_t^3 est-il une martingale ?

c) Déduire des deux questions précédentes que $X_t = W_t^3 - 3tW_t$ est une martingale.

d) Cette question et la suivante visent à retrouver le résultat précédent mais de manière plus directe. Montrez que si $f(t,x)$ est une fonction telle que $\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, alors $Y_t = f(t, W_t)$ est une martingale.

e) Soit $f(t,x) = x^3 + g_2(t)x^2 + g_1(t)x + g_0(t)$. Trouvez des fonctions g_0, g_1, et g_2 telles que $Y_t = f(t, W_t)$ soit une martingale.