

# Analyse de Fourier et distributions

Erwan Penchère



## 1 Les séries de Fourier

### 1.1 Préliminaires

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et soit  $T > 0$ . On dit que  $f$  est  $T$ -périodique si  $f(x+T) = f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . On a alors  $f(x+kT) = f(x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{Z}$ .

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On dit qu'elle est *continue par morceaux* sur le segment  $[a, b]$  s'il existe une subdivision

$$[a, b] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{n-1}, a_n]$$

du segment en  $[a, b]$  et des fonctions continues

$$h_i : [a_i, a_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$$

pour  $0 \leq i < n$ , telles que  $f = h_i$  sur  $]a_i, a_{i+1}[$ . Il revient au même de dire que  $f$  est continue en tout point distinct des  $a_i$  et que les limites  $\lim_{a_i^-} f$  pour  $0 < i \leq n$  et  $\lim_{a_i^+} f$  pour  $0 \leq i < n$  existent et sont finies. Si de plus, pour chaque  $i$ , la fonction  $h_i$  est de classe  $\mathbf{C}^1$ , on dit que  $f$  est  $\mathbf{C}^1$  par morceaux.

On considère d'abord les fonctions  $T$ -périodiques suivantes, que l'on appelle parfois « harmoniques fondamentales » :

$$\begin{aligned} x &\mapsto 1 \\ x &\mapsto \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) \\ x &\mapsto \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) \end{aligned} \quad (k \in \mathbb{Z}_+^*)$$

Ces fonctions vérifient certaines « relations d'orthogonalité » pour tout couple d'entiers  $k, p \in \mathbb{Z}_+^*$  :

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T} px\right) dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq p \\ T/2 & \text{si } k = p \end{cases} \\ \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T} px\right) dx &= 0 \end{aligned}$$

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T} px\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq p \\ T/2 & \text{si } k = p \end{cases}$$

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) dx = 0$$

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) dx = 0$$

$$\int_0^T 1 dx = T$$

**Exercice 1.1** Vérifiez les relations d'orthogonalité.

## 1.2 Théorie de Fourier des polynômes trigonométriques $T$ -périodiques

Dans tout ce qui suit, quand on parle de fonction « intégrable », c'est au sens de Riemann qu'il faut l'entendre (on rappelle qu'une fonction Riemann-intégrable sur un intervalle  $[0, T]$  est une fonction bornée telle que la limite supérieure des intégrales des fonctions en escalier inférieures à  $f$  est égale à la limite inférieure des intégrales des fonctions en escalier supérieures à  $f$ ).

Pour  $T > 0$  fixé, on appelle *polynôme trigonométrique*  $T$ -périodique toute fonction  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme :

$$p(x) = a_0 + \sum_{1 \leq k \leq N} \left( a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) \right)$$

où les  $a_k$  et les  $b_k$  sont des coefficients réels et  $N$  est entier  $\geq 0$ .

Grâce aux relations d'orthogonalité, on montre que :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T p(x) dx$$

et pour tout  $k \geq 1$  :

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T p(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) dx, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T p(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) dx.$$

En particulier, les coefficients du polynôme trigonométrique  $p$  sont uniquement déterminés. Autrement dit, pour  $N$  fixé, l'application

$$(a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N) \longmapsto p$$

est un isomorphisme de  $\mathbb{R}^{2N+1}$  sur l'espace vectoriel de ces polynômes trigonométriques.

## 1.3 Les séries de Fourier

**Définition 1.1** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $T$ -périodique, intégrable sur  $[0, T]$  (donc sur tout segment de  $\mathbb{R}$ ). On appelle *série de Fourier* de  $f$  la *série de fonctions* :

$$a_0 + \sum_{n \geq 1} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \right)$$

où les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  sont définis par :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt.$$

Ainsi, on vient de voir que la série de Fourier d'un polynôme trigonométrique  $T$ -périodique est en fait une somme finie : c'est ce polynôme lui-même. On verra aussi que dans bien des cas, la somme de la série de Fourier de  $f$  ressemble beaucoup à  $f$ . Le problème est d'étudier la convergence de cette série. On verra que sa vitesse de convergence dépend de la régularité (le caractère plus ou moins lisse) de la fonction  $f$ .

#### 1.4 Théorie de Fourier pour la somme d'une série trigonométrique uniformément convergente

*Rappel.* Soit  $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k(x)$  une série de fonctions uniformément convergente définie sur un intervalle  $[0, T]$ . Si, pour tout  $k$ , la fonction  $s_k$  est continue, alors la somme  $S$  de la série est aussi continue, et on a :

$$\int_0^T S(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^T s_k(x) dx$$

**Théorème 1.1** Soit  $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la somme d'une série trigonométrique  $T$ -périodique uniformément convergente :

$$S(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) + \beta_k \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right)$$

Alors  $S$  est continue, et on a :

$$\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt$$

$$\alpha_n = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt, \quad \beta_n = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt.$$

Autrement dit, sous les hypothèses du théorème,  $S$  est égale à sa propre série de Fourier.

#### 1.5 Point de vue complexe

En pratique, on préfère souvent travailler avec des fonctions à valeur complexe  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Quitte à revenir au point de vue réel en fin de calcul. Du point de vue complexe, les formules présentent en effet une simplicité qui, du point de vue réel, reste cachée.

La fonction exponentielle complexe joue alors le rôle des fonctions trigonométriques  $\sin$  et  $\cos$ . Les « harmoniques fondamentales » sont (pour  $k \in \mathbb{Z}$ ) :

$$x \mapsto e^{\frac{2i\pi}{T} kx}$$

Les « relations d'orthogonalité » :

$$\int_0^T e^{\frac{2i\pi}{T}kx} e^{-\frac{2i\pi}{T}px} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq p \\ T & \text{si } k = p \end{cases}$$

La série de Fourier s'écrit :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{2i\pi}{T}kx}$$

Ses coefficients :

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-\frac{2i\pi}{T}kx} dx$$

En remarquant que  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ , on revient alors facilement au point de vue réel :<sup>1</sup>

$$a_0 = c_0$$

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad (n \geq 1)$$

Dans tout ce qui suit, on adopte désormais le point de vue complexe.

## 1.6 Inégalité de Bessel et lemme de Riemann-Lebesgue

**Théorème 1.2** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $T$ -périodique intégrable sur  $[0, T]$ . On note  $c_n$  ses coefficients de Fourier. Alors la série  $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$  est convergente et on a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$$

*Démonstration.* Pour  $N \geq 0$ , on note  $S_N(x)$  les sommes partielles de la série de Fourier de  $f$ , c'est-à-dire :

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{n=N} c_n e^{\frac{2i\pi}{T}nx}$$

On remarque alors que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T |f|^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T |(f - S_N) + S_N|^2 \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T |f - S_N|^2 + \frac{1}{T} \int_0^T |S_N|^2 + \frac{1}{T} \int_0^T (f - S_N) \overline{S_N} + \frac{1}{T} \int_0^T \overline{(f - S_N)} S_N \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T |f - S_N|^2 + \sum_{n=-N}^{n=N} |c_n|^2 + \frac{1}{T} \int_0^T (f - S_N) \overline{S_N} + \frac{1}{T} \int_0^T \overline{(f - S_N)} S_N \end{aligned}$$

Mais les deux derniers termes de cette somme sont nuls, alors pour tout  $N$  :

$$\sum_{n=-N}^{n=N} |c_n|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f|^2 - \frac{1}{T} \int_0^T |f - S_N|^2$$

D'où l'inégalité annoncée à la limite.

<sup>1</sup>Plus facilement encore, on peut retrouver tout le contenu de ce paragraphe en partant du point de vue réel puis en exprimant  $\sin$  et  $\cos$  en termes d'exponentielles complexes au moyen des formules d'Euler.

**Corollaire 1.1** Pour toute fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $T$ -périodique intégrable sur  $[0, T]$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n = 0$$

On a en fait le résultat plus général suivant :

**Théorème 1.3 (Lemme de Riemann-Lebesgue)** Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction intégrable. On a alors :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0$$

*Démonstration.* On se contente pour l'instant du cas particulier où  $f$  est de classe  $\mathbf{C}^1$  par morceaux. La démonstration générale du lemme de Riemann-Lebesgue fera intervenir certains résultats de « densité » que l'on verra dans les sections suivantes. Si  $f$  est  $\mathbf{C}^1$  par morceaux, il existe une subdivision  $[a, b] = [a_0, a_1] \cup \dots \cup [a_{n-1}, a_n]$  et des fonctions  $h_i: [a_i, a_{i+1}] \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $\mathbf{C}^1$ . On a alors :

$$\int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} h_i(t) e^{i\lambda t} dt$$

Une intégration par parties nous donne :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left( \left[ \frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} h_i(t) \right]_{a_i}^{a_{i+1}} - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} h_i'(t) dt \right)$$

Sur chaque intervalle  $[a_i, a_{i+1}]$ , la fonction  $h_i'$  est continue donc bornée, et chacune de ces intégrales tend donc vers zéro quand  $\lambda$  tend vers l'infini. De même pour les termes constants. Le lemme de Riemann-Lebesgue est ainsi démontré dans le cas  $\mathbf{C}^1$  par morceaux.

## 1.7 Théorie de Fourier des fonctions $\mathbf{C}^1$ par morceaux

**Théorème 1.4 (Dini-Dirichlet)** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $T$ -périodique et de classe  $\mathbf{C}^1$  par morceaux. Alors la série de Fourier de  $f$  converge en tout point

$x_0 \in \mathbb{R}$  et sa somme en  $x_0$  est  $\frac{\lim_{x_0^-} f + \lim_{x_0^+} f}{2}$  :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2i\pi}{T} nx_0} = \frac{\lim_{x_0^-} f + \lim_{x_0^+} f}{2}$$

Pour démontrer ce théorème, on utilise la fonction  $2\pi$ -périodique suivante, appelée « noyau de Dirichlet d'ordre  $N$  » (cf. figure où sont tracés  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_4$  et  $D_8$ ) :

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{n=N} e^{inx}$$

**Lemme 1.1** Le noyau de Dirichlet vérifie les propriétés suivantes :

(i)  $\int_0^\pi D_N(t) dt = \pi$

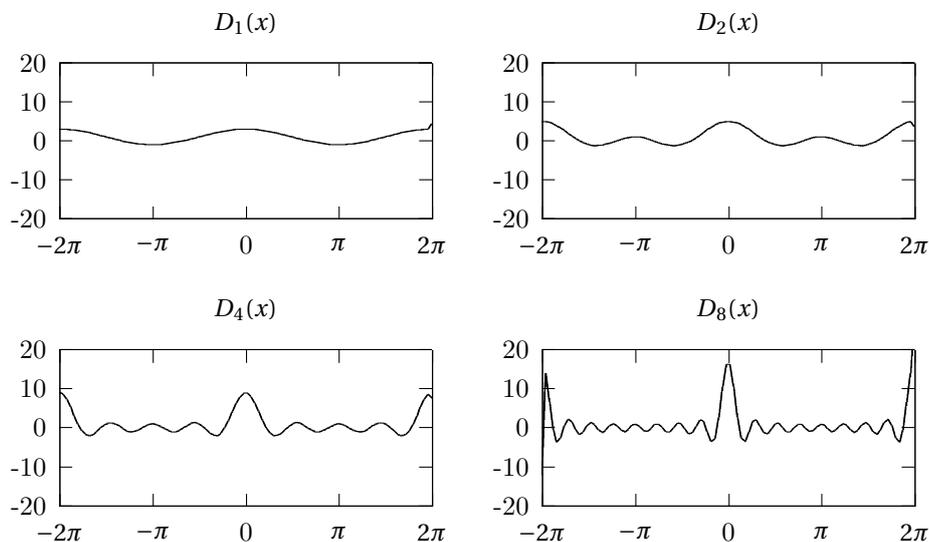


FIG. 1 : Noyau de Dirichlet

(ii) pour tout  $t \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$

$$D_N(t) = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

(iii) pour tout  $\epsilon > 0$  et toute fonction  $f$  de classe  $\mathbf{C}^1$  par morceaux sur l'intervalle  $[\epsilon, \pi]$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\epsilon}^{\pi} f(t) D_N(t) dt = 0$$

Les deux premières assertions se vérifient facilement par le calcul. La troisième est une conséquence de lemme de Riemann-Lebesgue : sur l'intervalle  $[\epsilon, \pi]$ , l'intégrale en question s'écrit

$$\int_{\epsilon}^{\pi} \frac{f(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = \operatorname{Im} \left( \int_{\epsilon}^{\pi} \frac{f(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} e^{i\left(N + \frac{1}{2}\right)t} dt \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

**Lemme 1.2** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $T$ -périodique intégrable sur  $[0, T]$ . Pour tout entier  $N \geq 1$ , notons  $S_N^f(x)$  la somme partielle d'ordre  $N$  de la série de Fourier de  $f$ , c'est-à-dire le polynôme trigonométrique suivant :

$$S_N^f(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{\frac{2i\pi}{T} kx}$$

On a alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$S_N^f(x) = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} D_N\left(\frac{2\pi}{T}t\right) (f(x+t) + f(x-t)) dt$$

*Démonstration.* Par définition des coefficients  $c_k$ , les sommes partielles s'écrivent ainsi :

$$\begin{aligned}
S_N^f(x) &= \sum_{k=-N}^N \left( \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2i\pi}{T} kt} dt \right) e^{\frac{2i\pi}{T} kx} \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \left( \sum_{k=-N}^N f(t) e^{-\frac{2i\pi}{T} kt + \frac{2i\pi}{T} kx} \right) dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot D_N \left( \frac{2\pi}{T} (x-t) \right) dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{x-T}^x f(x-s) \cdot D_N \left( \frac{2\pi}{T} s \right) ds \quad (\text{on pose } s = x-t) \\
&= \frac{1}{T} \int_{x-T}^0 f(x-s) \cdot D_N \left( \frac{2\pi}{T} s \right) ds + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} f(x-s) \cdot D_N \left( \frac{2\pi}{T} s \right) ds \\
&= \frac{1}{T} \int_0^{-T/2} f(x+s) \cdot D_N \left( \frac{2\pi}{T} s \right) ds + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} f(x-s) \cdot D_N \left( \frac{2\pi}{T} s \right) ds
\end{aligned}$$

(la dernière égalité s'obtient en changeant le signe de  $s$  et en remarquant que  $D_N$  est une fonction paire). Le lemme est ainsi démontré.

*Remarque.* Dans la démonstration de ce lemme, on a fait intervenir une expression en  $x$  de la forme :

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) h(x-t) dt$$

où  $h(t) = D_N \left( \frac{2\pi}{T} t \right)$ . On rencontre souvent cette expression en analyse de Fourier. On appelle cela le « produit de convolution » de  $f$  et  $h$ . C'est une fonction de  $x$  notée  $h \star f(x)$ . On a donc :

$$h \star f(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) h(x-t) dt$$

*Démonstration du théorème de Dini-Dirichlet.* Fixons un  $x_0$ . On va étudier la différence entre la somme partielle d'ordre  $N$  et la limite prédite par Dini-Dirichlet. Notons cette différence  $R_N$  :

$$R_N = S_N^f(x_0) - \frac{\lim_{x_0^-} f + \lim_{x_0^+} f}{2}$$

Le premier lemme implique que :

$$\frac{1}{T} \int_0^{T/2} D_N \left( \frac{2\pi}{T} t \right) dt = \frac{1}{2}$$

On a alors :

$$R_N = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} D_N \left( \frac{2\pi}{T} t \right) (f(x_0+t) + f(x_0-t)) dt - \left( \frac{1}{T} \int_0^{T/2} D_N \left( \frac{2\pi}{T} t \right) dt \right) \left( \lim_{x_0^-} f + \lim_{x_0^+} f \right)$$

On met en facteur le noyau de Dirichlet :

$$R_N = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} D_N \left( \frac{2\pi}{T} t \right) \left( f(x-t) - \lim_{x_0^-} f + f(x+t) - \lim_{x_0^+} f \right) dt$$

Soit maintenant la fonction  $g$  définie par :

$$g(t) = \frac{f(x-t) - \lim_{x_0^-} f + f(x+t) - \lim_{x_0^+} f}{\sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)}$$

Comme  $f$  est de classe  $\mathbf{C}^1$  par morceaux, la fonction  $g$  est prolongeable par continuité en  $t=0$ . L'expression réelle du noyau de Dirichlet permet alors d'écrire :

$$R_N = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{T} t\right) g(t) dt$$

Montrons à présent que  $R_N$  tend vers zéro. La continuité de  $g$  en zéro implique que l'intégrande est bornée en valeur absolue par une constante  $M > 0$  au voisinage de zéro. Pour  $\alpha = \frac{\epsilon T}{2M}$ , on a

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^\alpha \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{T} t\right) g(t) dt \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Mais  $g$  est  $\mathbf{C}^1$  par morceaux sur l'intervalle  $[\alpha, T/2]$  (car son numérateur et son dénominateur le sont). Le lemme de Riemann-Lebesgue implique que, pour  $N$  assez grand,

$$\frac{1}{T} \int_\alpha^{T/2} \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{T} t\right) g(t) dt < \frac{\epsilon}{2}$$

*q. e. d.*

**Théorème 1.5** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $T$ -périodique, continue, et de classe  $\mathbf{C}^1$  par morceaux. Elle a alors en tout point une dérivée à droite que l'on note  $f'_d$ . On a la relation suivante entre les coefficients de Fourier  $c_k(f)$  de la fonction  $f$  et ceux de sa dérivée à droite, notés  $c_k(f'_d)$  :

$$\frac{1}{k} c_k(f'_d) = \frac{2i\pi}{T} c_k(f)$$

*Démonstration.* Sur chaque morceau d'intervalle où la fonction  $f$  est  $\mathbf{C}^1$ , il suffit d'intégrer par parties l'expression suivante :

$$c_k(f'_d) = \frac{1}{T} \int_0^T f'_d(t) e^{-\frac{2i\pi}{T} kt} dt$$

**Corollaire 1.2** Soit  $p \geq 1$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $T$ -périodique de classe  $\mathbf{C}^p$  (c'est-à-dire  $p$  fois dérivable et dont la dérivée  $p$ -ième est continue). Alors

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

Ce corollaire est une conséquence de théorème précédent et du corollaire 1.1 page 5. En gros, plus une fonction est lisse et régulière, plus ses coefficients de Fourier tendent vite vers zéro.

**Lemme 1.3** ( $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ )  $\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$

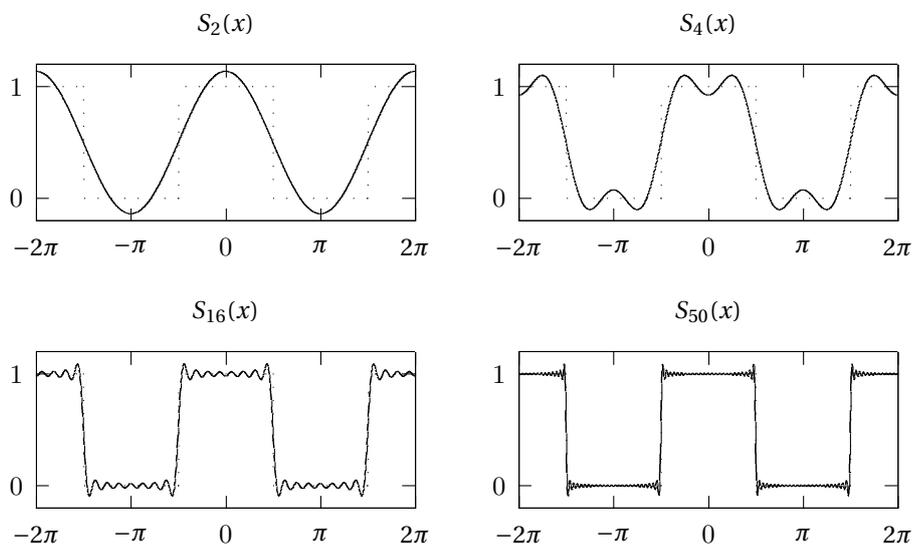


FIG. 2 : Phénomène de Gibbs

**Théorème 1.6** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $T$ -périodique, continue, et de classe  $\mathbf{C}^1$  par morceaux. Alors la série de Fourier de  $f$  est uniformément convergente et sa somme est  $f$ .

<sup>2</sup>Démonstration. La convergence simple vers  $f$  résulte du théorème de Dini-Dirichlet. Soit donc  $\epsilon > 0$ . La norme du terme général de la série de Fourier est :

$$|c_k(f) e^{i \frac{2\pi}{T} kx}| = |c_k| = \frac{T}{2i\pi k} |c_k(f')| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k^2} + \left| \frac{T}{2i\pi} c_k(f') \right|^2 \right)$$

(on applique le lemme précédent). Or les deux séries suivantes sont convergentes (inégalité de Bessel) :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{T}{2i\pi} c_k(f') \right|^2 + \left| \frac{T}{2i\pi} c_{-k}(f') \right|^2$$

Alors il existe un  $N$  tel que, pour tout  $n > N$  :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{\epsilon}{2}, \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \left| \frac{T}{2i\pi} c_k(f') \right|^2 + \left| \frac{T}{2i\pi} c_{-k}(f') \right|^2 < \frac{\epsilon}{2}$$

La convergence uniforme de la série de Fourier est ainsi démontrée :

$$|f(x) - S_N^f(x)| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |c_k| + |c_{-k}| < \epsilon$$

*Remarque :* En fait, sous les hypothèses du théorème de Dini-Dirichlet, on peut même montrer que la série de Fourier de  $f$  est uniformément convergente sur

<sup>2</sup>Comme conséquence de ce théorème, voir le lemme 1.5 p. 10 ci-dessous. De tels résultats vont permettre une démonstration générale du Lemme de Riemann-Lebesgue.

tout intervalle  $[a, b] \subset [0, T]$  sur lequel  $f$  est continue (pour le démontrer, il faut étudier davantage le comportement de  $h \star f$ ). Par contre, il est bien sûr impossible que la série de Fourier soit uniformément continue au voisinage des points de discontinuité de  $f$  (si elle l'était, la somme d'une série uniformément convergente de terme général continu étant continue,  $f$  devrait elle-même être continue...). Pire encore : aux points de discontinuité de  $f$ , on remarque que les sommes partielles  $S_N^f$  présentent une forte oscillation dont l'amplitude ne décroît pas lorsque  $N$  tend vers l'infini. Voir la figure où j'ai représenté  $S_2, S_4, S_{16}$  et  $S_{50}$ , sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction créneau (représentée en pointillés) : pour  $S_{50}$ , on voit bien les petites cornes au voisinage des points de discontinuité de  $f$ . C'est ce qu'on appelle le « phénomène de Gibbs ».

## 1.8 Quelques lemmes de densité

En analyse fonctionnelle, on a souvent besoin de résultats de *densité* : on approche une fonction d'un espace de fonctions donné avec des fonctions (souvent plus régulières) d'un espace de fonctions plus petit. Ces résultats dépendent de la topologie adoptée dans ces espaces fonctionnels, il faut donc toujours préciser une *norme*.

**Lemme 1.4 ( $h \in C^1$  par morceaux et  $f$  continue – norme sup)** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, et soit  $\epsilon > 0$ . Il existe  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $C^1$  par morceaux telle que  $|f(t) - h(t)| < \epsilon$  pour tout  $t \in [a, b]$ .

**Lemme 1.5 ( $p$  polynôme trigo et  $f$  périodique continue – norme sup)** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $T$ -périodique continue et soit  $\epsilon > 0$ . Il existe un polynôme  $T$ -trigonométrique  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tel que  $|f(t) - p(t)| < \epsilon$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

**Lemme 1.6 ( $h \in C^1$  par morceaux et  $f$  intégrable – norme  $L^1$ )** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Riemann-intégrable et soit  $\epsilon > 0$ . Il existe  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $C^1$  par morceaux telle que :

$$\int_a^b |f(t) - h(t)| dt < \epsilon$$

En particulier, le lemme 1.6 permet d'achever la démonstration du lemme de Riemann-Lebesgue pour  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  intégrable.

**Lemme 1.7 ( $p$  polynôme trigo et  $f$  périodique intégrable – norme  $L^2$ )** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $T$ -périodique Riemann-intégrable sur  $[0, T]$  et soit  $\epsilon > 0$ . Il existe un polynôme  $T$ -trigonométrique  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tel que :

$$\int_0^T |f(t) - p(t)|^2 dt < \epsilon$$

## 1.9 Identité de Parseval

**Lemme 1.8** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $T$ -périodique intégrable sur  $[0, T]$  et  $S_n^f$  les sommes partielles de sa série de Fourier. Soit  $p$  un polynôme trigonométrique de période  $T$ . Alors

$$(\exists N > 0) (\forall n > N) \int_0^T |f(x) - S_n^f(x)|^2 dx \leq \int_0^T |f(x) - p(x)|^2 dx$$

Ce lemme et le lemme 1.7 permettent de préciser l'inégalité de Bessel :

**Théorème 1.7 (Parseval-Bessel)** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $T$ -périodique intégrable sur  $[0, T]$  ; on note  $c_k$  ses coefficients de Fourier.

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$$

## 1.10 Exercices

**Exercice 1.2** Calculer les séries de Fourier des fonctions suivantes :

- la fonction  $f$ ,  $2\pi$ -périodique, définie sur  $] -\pi, \pi[$  par

$$f(x) = \frac{x}{2}$$

- la fonction  $g$ ,  $2\pi$ -périodique, définie par

$$g(x) = \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

- la fonction  $h$ ,  $2\pi$ -périodique, définie par

$$h(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{si } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

- la fonction  $j$ ,  $2\pi$ -périodique, définie sur  $[0, 2\pi]$  par

$$j(x) = x^2$$

- la fonction  $k$ ,  $2\pi$ -périodique paire, définie par

$$k(x) = \begin{cases} \frac{2Ex}{\pi} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ E & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

où  $E$  est une constante réelle arbitraire.

**Exercice 1.3** [V.1] Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $2\pi$ -périodique impaire vérifiant

$$(\forall x \in ]0, \pi]) f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

a) Donner la série de Fourier de  $f$  et sa somme. Calculer

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$$

b) Vérifier (en utilisant le critère d'Abel) que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

est uniformément convergente sur  $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$  si  $0 < \epsilon < \pi$ . Est-elle uniformément convergente sur  $[0, 2\pi]$  ?

**Exercice 1.4** [V.6] Soient  $a \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq a < 1$  et  $f$  de période 1 vérifiant :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{si } a < x < 1 \end{cases}$$

a) Déterminer la série de Fourier de  $f$

b) Pour  $0 < b < 1$ , montrer que la série suivante converge et donner sa somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(\pi n a) \cos(\pi n b)$$

**Exercice 1.5** [V.11] Montrer que, pour  $x \in ]0, \pi[$ ,

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}$$

Calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$ .

**Exercice 1.6** Montrer qu'il existe une suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  telle que, pour  $x \in [0, \pi]$ ,  $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$ .

**Exercice 1.7** [V.18] Soient  $b \in \mathbb{C}^*$  avec  $|b| < 1$  et  $a \in \mathbb{R}$ . A quelle condition sur  $a$  l'équation différentielle  $y'' + ay = \frac{1}{1 - be^{ix}}$  possède-t-elle une solution  $2\pi$ -périodique ?

**Exercice 1.8** [V.21] Soient  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  et  $f_\alpha$  la fonction  $2\pi$ -périodique vérifiant  $f_\alpha(t) = \cos(\alpha t)$  pour  $t \in [-\pi, \pi]$ .

a) Déterminer la série de Fourier de  $f_\alpha$  et montrer que :

$$(\forall t \notin \pi\mathbb{Z}) \cotan(t) = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}$$

b) Montrer que, pour tout  $t \in ]-\pi, 0[ \cup ]0, \pi[$ , on a  $\frac{1}{\sin^2(t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t - n\pi)^2}$

**Exercice 1.9** [V.24]

- a) Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  continue  $2\pi$ -périodique, dont la série de Fourier est uniformément convergente. Montrer que  $f$  est somme de sa série de Fourier.
- b) Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique paire vérifiant  $f(x) = \sqrt{x}$  si  $x \in [0, \pi]$ . Montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $(\forall n > 0) |a_n(f)| \leq Cn^{-3/2}$ . En déduire que  $f$  est somme de sa série de Fourier. Pouvaient-on obtenir ce résultat par le théorème de Dirichlet ?

**Exercice 1.10** [V.28] Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $f(x) = \operatorname{ch}(ax)$  si  $x \in [-\pi, \pi]$ . Donner la série de Fourier de  $f$ . Calculer les deux séries numériques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2 + a^2)^2}$$

**Exercice 1.11** [V.30]

- a) Donner la série de Fourier de la fonction  $x \mapsto |\sin x|$ .
- b) Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Montrer que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) |\sin(\lambda t)| dt = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) dt.$$

**Exercice 1.12** [V.33] Soit  $f \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  une fonction  $2\pi$ -périodique vérifiant  $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ . Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} f^2(t) dt \leq \int_0^{2\pi} (f'(t))^2 dt.$$

Dans quels cas a-t-on égalité ?

**Exercice 1.13** Déterminer les solutions  $2\pi$ -périodiques de l'équation différentielle  $y'' + ye^{ix} = 0$ .

**1.11 Application : physique des ondes**

Le phénomène d'« onde » consiste en général en la variation d'une grandeur physique et en la propagation de cette variation dans l'espace. Par exemple l'« onde progressive » qui voyage le long d'une corde, suite à l'ébranlement d'une de ses extrémités. Le déplacement transversal du point d'abscisse  $x$  le long de la corde (voir figure) sera de la forme  $y = f(x - ct)$  où  $c$  est la vitesse de propagation de l'ébranlement. Il existe toutefois des « ondes stationnaires » qui ne sont pas à proprement parler des phénomènes de propagation. Dans ce cas la grandeur physique a en chaque point un comportement oscillatoire (qui va disparaître peu à peu s'il y a des frottements), semblable à celui d'un oscillateur harmonique. Toutes ces oscillations sont couplées mais sans décalage de phase. La grandeur en question est de la forme  $y = A(x)f(t)$ .

Intéressons-nous d'abord à l'équation des cordes vibrantes dite aussi « équation de d'Alembert ». Cette équation aux dérivées partielles régit le déplacement transversal d'un petit bout de corde au point  $(x, y)$  (voir figure) :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

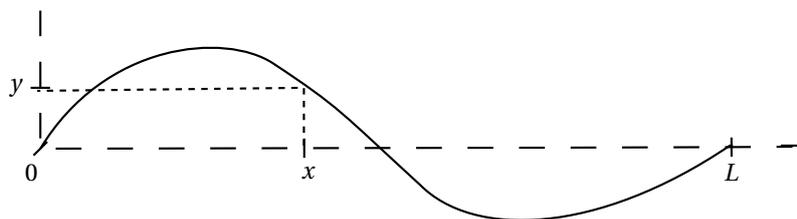


FIG. 3 : Corde de guitare

En 1727, Johann I Bernoulli connaissait déjà cette équation (sous la forme d'une équation aux différences finies). La constante  $c$  est une célérité qui dépend de la masse linéique et de la tension de la corde. C'est aussi la vitesse de propagation d'une onde progressive le long de la corde. Cette équation nous permet par exemple de modéliser le mouvement d'une *corde de guitare* de longueur  $L$ . On va voir que dans ce cas, les solutions de l'équation de d'Alembert sont décomposables en une superposition d'ondes stationnaires, sinusoidales, et on pourra calculer cette décomposition par la théorie de Fourier.

*Conditions aux limites* : la corde est attachée aux deux bouts,  $y(0, t) = y(L, t) = 0$ . Supposons que l'on pince la corde : elle va prendre une certaine forme initiale, donnée par la fonction  $x \mapsto y(x, 0)$ . Si l'on ne communique pas d'impulsion à la corde au moment où on la lâche,  $\frac{dy}{dt}(x, 0) = 0$  pour tout  $x$ .

On remarque d'abord qu'il existe une famille de solutions « stationnaires » de la forme

$$y = A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

avec  $\omega = ck$ . Et les conditions aux limites imposent à  $k$  d'être un multiple entier de  $\pi/L$ . La forme initiale de la corde est alors :

$$y(x, 0) = A \sin(kx)$$

Dès 1753, Daniel Bernoulli pensait que la solution générale s'obtient comme somme de telles solutions particulières, c'est-à-dire :

$$y(x, t) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)$$

La forme initiale de la corde est alors :

$$y(x, 0) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Mais justement, la théorie de Fourier nous enseigne que, étant donnée toute forme initiale suffisamment régulière – disons pour l'instant de classe  $C^\infty$  – la fonction  $x \mapsto y(x, 0)$  peut s'écrire comme somme d'une série trigonométrique. On veut ici la représenter comme somme d'une série de sinus, il faut donc supposer que cette fonction est la restriction à l'intervalle  $[0, L]$  d'une fonction impaire  $2L$ -périodique. On calcule les  $b_n$  au moyen d'intégrales :

$$b_n = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L y(x, 0) \sin\left(\frac{2n\pi}{2L}x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L y(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

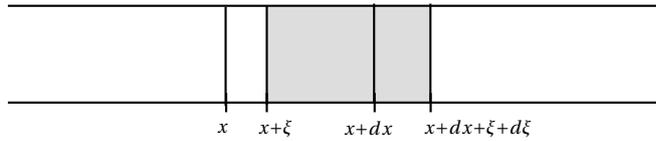


FIG. 4 : Déplacement d'une tranche d'air  $[x, x + dx]$  dans une flûte

Si les  $b_n$  tendent assez vite vers zéro, ce qui est garanti par la régularité de la fonction  $x \mapsto y(x, 0)$ , la série sera uniformément convergente, de même que la série suivante et ses dérivées premières et secondes :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)$$

Les théorèmes sur la dérivabilité terme à terme des séries permettent alors de conclure qu'elle est bien solution de l'équation de d'Alembert, et c'est là la solution générale. Conclusion : le mouvement d'une corde de guitare pincée est décomposable en une superposition d'ondes stationnaires : des « harmoniques » dont les fréquences sont les multiples de la fréquence fondamentale  $\frac{c}{2L}$ .

Autre application : les *ondes acoustiques à une dimension*. On peut montrer que l'équation de d'Alembert régit le déplacement longitudinal de petites tranches d'air dans un tuyau sous l'effet d'une surpression (voir figure). Si une tranche située à l'abscisse  $x$  le long du tuyau se déplace d'une longueur  $\xi$ , l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

La constante  $c$  dépend alors du coefficient de compressibilité de l'air et de sa masse volumique. Ce modèle rend compte du mouvement de la colonne d'air dans une flûte.

*Conditions initiales* : dans une flûte de longueur  $L$ , il y a un « nœud » à l'extrémité où l'on souffle  $\xi(0, t) = 0$ , et un « ventre » à l'autre bout  $\frac{\partial \xi}{\partial x}(L, t) = 0$  (mais dans certains instruments à vent, par exemple certains tuyaux d'orgue dont les deux bouts sont fermés, il y a un nœud à chaque bout, et la colonne d'air se comporte alors comme la corde de guitare fixée aux deux bouts). A l'instant initial, pour tout  $x$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial t}(x, 0) = 0$ . Et la fonction  $x \mapsto \xi(x, 0)$  précise l'état initial de la colonne d'air.

Ici aussi on a une famille de solutions particulières de la forme :

$$\xi = A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

avec  $\omega = kc$ , mais cette fois les conditions aux limites imposent que  $k = \frac{(2n-1)\pi}{2L}$ . Autrement dit, seules les harmoniques d'ordre impair sont solutions. Ceci explique en partie la différence de timbre entre le son d'une flûte et celui d'une guitare ou d'un orgue.

Si l'on veut, ici aussi, représenter la solution générale comme somme de telles solutions particulières, il faut parvenir à exprimer l'état initial de la colonne d'air comme une somme de sinus d'ordres impairs :

$$\xi(x, 0) = \sum_{n \geq 1} b_{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right)$$

Or la théorie de Fourier pour la période  $4L$  nous permet de le faire. Les fonctions  $4L$ -périodiques dont la série de Fourier ne contient que des sinus d'ordres impairs sont les fonctions vérifiant les deux conditions suivantes :

i)  $(\forall x \in \mathbb{R}) f(-x) = -f(x)$

ii)  $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x+2L) = -f(x)$

Il faut donc supposer que la fonction  $x \mapsto \xi(x, 0)$  est la restriction à  $[0, L]$  d'une telle fonction (c'est toujours possible). La théorie de Fourier pour la période  $4L$  nous donne alors :

$$b_{2n-1} = \frac{2}{4L} \int_{-2L}^{2L} \xi(x, 0) \sin\left(\frac{2(2n-1)\pi}{4L}x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \xi(x, 0) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right) dx$$

D'où la solution générale :

$$\xi(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi c}{2L}t\right)$$

Conclusion : le mouvement de la colonne d'air dans une flûte est décomposable en une superposition d'ondes stationnaires : les harmoniques dont les fréquences sont des multiples impairs de la fréquence fondamentale  $\frac{c}{4L}$ .

*Remarque* : ondes dans un câble coaxial. L'équation de d'Alembert sert aussi à modéliser les variations en tension ou en intensité le long d'une ligne de transmission électrique, par exemple un câble coaxial :

$$c^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

où  $i$  est l'intensité en l'abscisse  $x$  le long du câble, et la constante  $c = 1/\sqrt{\Lambda\Gamma}$  dépend de l'inductance et de la capacité par unité de longueur, qui elles-mêmes dépendent des rayons  $r_1$  et  $r_2$  (voir figure), de la permittivité et de la perméabilité du diélectrique isolant le blindage de l'âme du câble. Mais on ne s'intéresse pas au même genre de conditions aux limites que précédemment. Dans une ligne de transmission électrique, un signal est produit à une extrémité en faisant varier la tension ou l'intensité. Cette variation se propage le long de la ligne. Les ondes stationnaires perturbent la transmission et sont donc plutôt à éviter. On s'intéresse ici davantage à des solutions de type « onde progressive », de la forme :

$$i = f(x - ct)$$

La fonction  $t \mapsto f(-ct)$  décrit alors une des conditions aux limites : le signal produit à l'extrémité  $x = 0$  du câble.

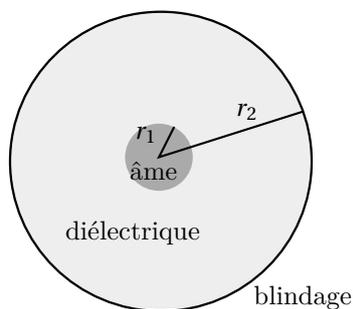


FIG. 5 : Section d'un câble coaxial

*Remarque liminaire* : pour toute variable  $y$  ayant des dérivées partielles secondes, on peut montrer que

$$c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \iff y \text{ est de la forme } f(x - ct) + g(x + ct)$$

Euler l'avait remarqué dès 1750. Mais alors, dans la modélisation du phénomène physique, on peut entièrement remplacer l'équation aux dérivées partielles par la formule de droite. Cette nouvelle formulation est même plus générale que l'équation aux dérivées partielles : on peut imaginer des variables de la forme  $y = f(x - ct) + g(x + ct)$  qui ne soient pas dérivables. On remplace ainsi une équation aux dérivées partielles par une description du phénomène qui garde un sens même quand les quantités observées ne sont plus des variables continues bien régulières. Peut-on procéder ainsi pour n'importe quelle équation aux dérivées partielles ? On verra comment la *théorie des distributions* résoud ce problème.

En attendant, remarquons que les conditions aux limites dans la description d'un phénomène physique ne peuvent être déterminées empiriquement au delà d'une certaine marge de précision : on peut donc toujours supposer que les fonctions qui interviennent (par exemple la fonction décrivant la forme initiale d'une corde de guitare...) sont toutes  $\mathbf{C}^\infty$ . Les lemmes de densité vus précédemment nous montrent que cela est possible.

**Exercice 1.14 (piano, corde frappée)** *A l'instant  $t = 0^-$ , la corde de longueur  $L$  est immobile dans la position d'équilibre  $y(x, 0) = 0$ . On la frappe avec un petit marteau de largeur  $e$  (on prendra  $e$  très inférieur à  $L$ ) situé entre les abscisses  $x = a$  et  $x = a + e$ , qui communique par le choc une impulsion initiale à la partie frappée. On admet que dans ces conditions, la vitesse de chaque point de la corde à l'instant  $t = 0^+$  est donnée par une fonction créneau :*

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} u & \text{si } a \leq x \leq a + e \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

- 1) Utiliser la théorie de Fourier pour décrire le mouvement de la corde frappée en fonction de  $u$ ,  $e$ ,  $L$  et  $a$ .
- 2) Trouver une application musicale du fait que les coefficients dépendent de  $a$ . Que faut-il faire pour supprimer le premier harmonique dissonant défini par

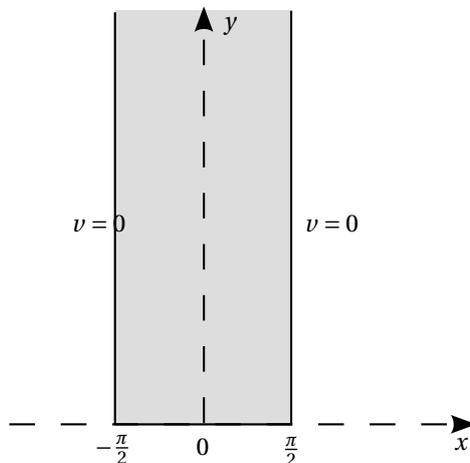


FIG. 6 : Températures constantes dans une lame infinie

$n = 7$  ? Faire un dessin de la corde et expliquer.

- 3) Dans le cas  $a = L/2$ , quels sont les harmoniques présents dans le son émis par la corde frappée ? Ce résultat était-il physiquement prévisible ? Donner  $y(x, t)$ .

**Exercice 1.15 (températures constantes dans une lame infinie)** *Problème historique, résolu par Fourier dès 1807 puis en 1822 dans sa Théorie analytique de la chaleur. On suppose qu'une lame rectangulaire (voir figure) est échauffée par sa base et conserve dans tous les points de cette base une température constante 1, tandis que chacune des deux arêtes infinies perpendiculaires à la base est assujétie dans tous ses points à une température constante 0. Il s'agit de déterminer quelles doivent être les températures stationnaires  $v$  de chaque point de la lame.*

On sait que la question revient à résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Les conditions aux limites sont :

(i)  $(\forall y > 0) \quad v(-\pi/2, y) = 0,$

(ii)  $(\forall y > 0) \quad v(\pi/2, y) = 0,$

(iii)  $(\forall x \in [-\pi/2, \pi/2]) \quad v(x, 0) = 1.$

On s'aidera des questions suivantes :

1. On remarquera d'abord qu'il existe une famille de solutions particulières de la forme

$$v = e^{-\omega y} \cos(\omega x)$$

et on écrira la condition que doit vérifier  $\omega$  pour qu'une telle solution vérifie les conditions aux limites (i) et (ii)

2. Montrer que, pour tout entier positif  $n$ ,

$$\cos\left((2n+1)\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = -\cos\left((2n+1)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$$

3. Soit  $h$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie par :

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-\pi, -\pi/2[ \\ 0 & \text{pour } x = -\pi/2 \\ 1 & \text{si } x \in ]-\pi/2, \pi/2[ \\ 0 & \text{pour } x = \pi/2 \\ -1 & \text{si } x \in ]\pi/2, \pi] \end{cases}$$

Montrer que  $h$  est paire, et que pour tout  $x$ ,

$$h\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -h\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

4. Calculer les coefficients de Fourier de  $h$  ; on les notera  $A_n$  et  $B_n$ .

5. Ecrire la série de Fourier de  $h$  et conclure que

$$v(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_{2n+1} e^{-(2n+1)y} \cos((2n+1)x)$$

(on ne se posera pas la question de la convergence d'une telle série...)

**Exercice 1.16 (mouvement de la chaleur dans une armille)** On place une flamme sous une région d'un anneau d'ancrage – un de ces anneaux de fer auquel on fixe les chaînes d'amarrage des bateaux. Lorsqu'une partie de l'anneau est chauffée au rouge, on le retire du feu et on l'enfouit au temps  $t=0$  dans un sable fin isolant ; on mesure alors la répartition des températures tout autour de l'anneau et son évolution dans le temps.

Soit  $r$  le rayon de l'anneau,  $x$  la longueur de l'arc compris entre un point de l'anneau et l'origine  $O$ . Soit  $u$  la température. On sait que la question revient à intégrer l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

où  $K$  est un coefficient de diffusion dépendant du matériau.

Conditions aux limites. On suppose que juste après le chauffage, la température est irrégulièrement répartie : une moitié est uniformément chaude, l'autre uniformément froide et, entre elles, la température décroît brutalement. La moitié comprise depuis  $x=0$  jusqu'à  $x=\ell$  a dans tous ses points la température 1 et l'autre partie a la température 0.

Résoudre cette équation. Indication : on cherchera des solutions particulières de la forme  $ae^{mt} \sin(nx)$  ou de la forme  $ae^{mt} \cos(nx)$ .

## 2 Transformée de Fourier discrète

### 2.1 Théorème fondamental

Dans la section précédente, à toute fonction intégrable sur un intervalle fermé  $[0, T]$ , on a associé une suite de coefficients  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , et on a montré que la

connaissance de ces coefficients permettait de reconstituer la fonction, à quelques questions de convergence près, comme somme d'une série :

$G = [0, T]$	$\check{G} = \mathbb{Z}$
espace des fonctions intégrables sur $[0, T]$	espace des suites $(c_n)$
$x \mapsto f(x)$	$\xrightarrow{\text{Fourier}} n \mapsto c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi nt/T} dt$
$x \mapsto e^{2i\pi kx/T}$	$\xrightarrow{\text{Fourier}} n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

La théorie de Fourier réalise donc une correspondance entre deux espaces. Ces deux espaces (espace de fonctions et espace de suites) sont des espaces vectoriels, et cette correspondance est en fait une application linéaire. On remarquera aussi le rôle particulier joué par les fonctions de la forme

$$x \mapsto e^{2i\pi kx/T}$$

La série de Fourier d'une telle fonction se réduit à un unique terme affecté d'un coefficient égal à 1.

On verra plus loin que l'on peut aussi faire une théorie de Fourier pour  $G = \mathbb{R}$ . Dans ce cas  $\check{G} = \mathbb{R}$  aussi, et la transformée de Fourier d'une fonction est une autre fonction.

Mais pour l'instant, c'est la « transformée de Fourier discrète » qui va nous occuper, c'est-à-dire le cas où  $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ . On rappelle que  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  est l'ensemble des nombres entiers de 0 à  $N-1$ , soumis à l'addition « modulo  $N$  ». Ici aussi on a certaines fonctions particulières :

$$\begin{aligned} \chi: \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ x &\mapsto e^{2i\pi kx/N} \end{aligned}$$

Ces fonctions vérifient  $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$ . En théorie des représentations, on appelle ça des « caractères du groupe abélien  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  ».

$G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$	$\check{G} = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$
espace des fonctions complexes sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$	espace des fonctions complexes sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$
$f: x \mapsto f(x)$	$\xrightarrow{\text{Fourier}} Ff: y \mapsto \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-2i\pi xy/N}$
caractère $x \mapsto e^{2i\pi kx/N}$	$\xrightarrow{\text{Fourier}} y \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } y = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Dans ce contexte, il n'y a plus aucun problème de convergence : on ne fait que travailler avec des sommes finies. Plus besoin d'intégrales. Et l'on peut reconstituer la fonction  $f$  de manière exacte à partir de sa transformée de Fourier  $Ff$  :

**Théorème 2.1**

$$(\forall x \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \quad f(x) = \sum_{y=0}^{N-1} Ff(y) e^{2i\pi yx/N}$$

*Remarque* : ce théorème peut aussi s'exprimer de manière plus concise. Le membre de droite ressemble beaucoup à la transformée de Fourier de  $Ff$ , que l'on notera  $FFf$ . Alors :

$$(\forall x \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \quad \frac{1}{N} f(-x) = FFf(x)$$

Pour démontrer ce théorème, on utilise le lemme suivant.

**Lemme 2.1**

$$\sum_{x=0}^{N-1} e^{2i\pi kx/N} = \begin{cases} N & \text{si } k = 0 \text{ mod } N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*Remarque* : l'espace des fonctions à valeur complexe sur  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $N$ . On peut associer à chaque fonction  $f$  une norme  $\|f\|$  définie par :

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{x=0}^{N-1} |f(x)|^2} = \sqrt{\sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cdot \overline{f(x)}}$$

Quand on définit une telle norme, on dit que cet espace de fonctions est un « espace hermitien ». On peut alors énoncer le théorème suivant :

**Théorème 2.2 (identité de Parseval)**

$$\|Ff\|^2 = \frac{1}{N} \|f\|^2$$

**2.2 Transformée de Fourier rapide**

Pour tout  $y \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , le calcul de  $Ff(y)$  fait intervenir  $N$  multiplications. Ainsi, pour connaître les valeurs de  $Ff$  en tous les  $N$  entiers de  $0$  à  $(N-1)$ , il faut faire  $N^2$  multiplications, ce qui est beaucoup dès que  $N$  est grand. On peut faire mieux : c'est l'objet de la « transformée de Fourier rapide ».

**2.2.1 Un exemple simple**

En général, on pratique la transformée de Fourier rapide en choisissant  $N$  égal à une puissance de 2. On donnera d'abord un exemple simple :  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ . Soit donc une fonction complexe  $f$  sur  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ . Pour tout entier  $n$  on notera  $c_n = Ff(n)$ . Il s'agit donc de calculer les coefficients  $c_n$ , sachant que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^7 c_n e^{2i\pi nx/8}$$

L'idée géniale consiste à casser cette somme de huit termes en deux morceaux (de quatre termes chacun) qui sont eux-mêmes des transformées de Fourier discrètes. On met d'un côté les termes d'indices  $n = 2k$  pairs, de l'autre ceux d'indices  $n = 2k + 1$  impairs :

$$f(x) = \sum_{k=0}^3 c_{2k} e^{2i\pi kx/4} + e^{2i\pi x/8} \sum_{k=0}^3 c_{2k+1} e^{2i\pi kx/4}$$

Maintenant, remplaçons  $x$  par  $x + 4$  :

$$f(x+4) = \sum_{k=0}^3 c_{2k} e^{2i\pi kx/4} - e^{2i\pi x/8} \sum_{k=0}^3 c_{2k+1} e^{2i\pi kx/4}$$

Inversons les deux relations précédentes, on obtient :

$$\sum_{k=0}^3 c_{2k} e^{2i\pi kx/4} = \frac{f(x) + f(x+4)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^3 c_{2k+1} e^{2i\pi kx/4} = \frac{f(x) - f(x+4)}{2} e^{-2i\pi x/8}$$

Mais dans ces deux sommes, les exponentielles sont 4-périodiques, ce sont en fait des fonctions sur  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ . On peut refaire pour  $\mathbb{Z}_4$  ce qu'on vient de faire pour  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  : cassons chacune de ces deux sommes de quatre termes en deux morceaux de deux termes. On obtient pour la première :

$$\frac{f(x) + f(x+4)}{2} = (c_0 + e^{2i\pi x/2} c_4) + e^{2i\pi x/4} (c_2 + e^{2i\pi x/2} c_6)$$

Les exponentielles se simplifient :

$$\frac{f(x) + f(x+4)}{2} = (c_0 + (-1)^x c_4) + i^x (c_2 + (-1)^x c_6)$$

Maintenant, remplaçons  $x$  par  $x + 2$  pour obtenir une deuxième relation :

$$\frac{f(x+2) + f(x+6)}{2} = (c_0 + (-1)^x c_4) - i^x (c_2 + (-1)^x c_6)$$

Quant à l'autre somme, elle nous donne :

$$\frac{f(x) - f(x+4)}{2} e^{-2i\pi x/8} = (c_1 + (-1)^x c_5) + i^x (c_3 + (-1)^x c_7)$$

Remplaçons  $x$  par  $x + 2$  pour obtenir une dernière relation :

$$\frac{f(x+2) - f(x+6)}{2} e^{-2i\pi(x+2)/8} = (c_1 + (-1)^x c_5) - i^x (c_3 + (-1)^x c_7)$$

En inversant ces quatre relations, on obtient les quantités suivantes :

$$c_0 + (-1)^x c_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{f(x) + f(x+4)}{2} + \frac{f(x+2) + f(x+6)}{2} \right)$$

$$c_2 + (-1)^x c_6 = \frac{i^{-x}}{2} \left( \frac{f(x) + f(x+4)}{2} - \frac{f(x+2) + f(x+6)}{2} \right)$$

$$c_1 + (-1)^x c_5 = \frac{1}{2} \left( \frac{f(x) - f(x+4)}{2} e^{-2i\pi x/8} + \frac{f(x+2) - f(x+6)}{2} e^{-2i\pi(x+2)/8} \right)$$

$$c_3 + (-1)^x c_7 = \frac{i^{-x}}{2} \left( \frac{f(x) - f(x+4)}{2} e^{-2i\pi x/8} - \frac{f(x+2) - f(x+6)}{2} e^{-2i\pi(x+2)/8} \right)$$

On voit que ces quatre quantités sont des fonctions sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , et l'on peut faire pour  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ce qu'on a fait pour  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ . On remplace  $x$  par  $x+1$ , on a en tout huit relations, on les inverse, et on trouve finalement les valeurs de  $c_0, c_1, \dots, c_7$ . Par exemple :

$$c_7 = \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{l} \frac{i^{-x}}{2} \left( \frac{f(x) - f(x+4)}{2} e^{-2i\pi x/8} - \frac{f(x+2) - f(x+6)}{2} e^{-2i\pi(x+2)/8} \right) \\ - \frac{i^{-(x+1)}}{2} \left( \frac{f(x+1) - f(x+5)}{2} e^{-2i\pi(x+1)/8} - \frac{f(x+3) - f(x+7)}{2} e^{-2i\pi(x+3)/8} \right) \end{array} \right]$$

### 2.2.2 L'algorithme

En pratique, quand on casse une somme en deux morceaux comme dans l'exemple ci-dessus, on ne va pas forcément chercher à mettre en facteur une exponentielle pour faire en sorte que chacun des morceaux ressemble à une transformée de Fourier à son tour. On préfère garder un résultat plus symétrique. On introduit des notations pour désigner à chaque étape les « morceaux de sommes » obtenus. Pour  $j \in [0, \mu]$ ,  $k \in [0, 2^j - 1]$  et  $l \in [0, 2^{\mu-j} - 1]$  des entiers, on note :

$$A_j(k, l) = \sum_{n=k \bmod 2^j} c_n e^{2i\pi n l / N}$$

*Remarque* : pour  $j = 0$ , la variable  $k$  ne peut prendre que la valeur 0, et on a pour  $l \in [0, N - 1]$  :

$$A_0(0, l) = f(l)$$

Pour  $j = \mu$ , la variable  $l$  ne peut prendre que la valeur 0, et on a pour  $k \in [0, N - 1]$  :

$$A_\mu(k, 0) = c_k$$

**Théorème 2.3** Si  $j \in [0, \mu - 1]$ ,  $k \in [0, 2^j - 1]$ , et  $l \in [0, 2^{\mu-j-1} - 1]$ , on a :

$$A_{j+1}(k, l) = \frac{1}{2} \left( A_j(k, l) + e^{\frac{-i\pi k}{2^j}} A_j(k, l + 2^{\mu-j-1}) \right)$$

$$A_{j+1}(k + 2^j, l) = \frac{1}{2} \left( A_j(k, l) - e^{\frac{-i\pi k}{2^j}} A_j(k, l + 2^{\mu-j-1}) \right)$$

*Démonstration* : récurrence sur  $j$ . A chaque étape, on casse les sommes en deux morceaux, ce qui conduit aux relations suivantes pour  $k \in [0, 2^j - 1]$  et  $l \in [0, 2^{\mu-j-1} - 1]$  :

$$A_j(k, l) = A_{j+1}(k, l) + A_{j+1}(k + 2^j, l)$$

$$A_j(k, l + 2^{\mu-j-1}) = \left( A_{j+1}(k, l) - A_{j+1}(k + 2^j, l) \right) e^{2i\pi 2^{\mu-j-1} k / 2^\mu}$$

On inverse ces deux relations, d'où les relations énoncées dans le théorème. *q. e. d.*

*Remarque* : il y a  $N \log_2(N)$  quantités  $A_j(k, l)$  à calculer, et chacune demande une multiplication seulement (on oublie les divisions par 2...). L'algorithme de la transformée de Fourier rapide réclame donc  $N \log_2(N)$  multiplications seulement, au lieu de  $N^2$ .

**Exercice 2.1** Soit les deux polynômes suivants :

$$P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$$

$$Q(x) = b_0 + b_1X + \dots + b_qX^q$$

Soit  $N = p + q$ . On définit deux fonctions  $f$  et  $g$  sur  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  par :

$$f(n) = P\left(e^{\frac{2i\pi n}{N}}\right) = \sum a_k e^{\frac{2i\pi kn}{N}}$$

$$g(n) = Q\left(e^{\frac{2i\pi n}{N}}\right) = \sum b_k e^{\frac{2i\pi kn}{N}}$$

Utiliser la transformée de Fourier discrète (éventuellement la transformée de Fourier rapide) pour calculer les coefficients  $c_k$  du produit des deux polynômes :

$$P(X)Q(X) = c_0 + c_1X + \dots + c_{p+q}X^{p+q}$$

Quel avantage y a-t-il à utiliser la transformée de Fourier rapide pour calculer le produit de deux polynômes ?

### 2.2.3 Interprétation matricielle

L'ensemble des fonctions sur  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $N$ . Les  $N$  fonctions suivantes forment une base ( $0 \leq k < N$ ) :

$$f_k : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans cette base, chaque fonction  $f$  sur  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  est repérée par un vecteur de  $\mathbb{R}^N$  :

$$\begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix}$$

La transformée de Fourier est un isomorphisme d'espaces vectoriels, dont la matrice dans cette base est :

$$F_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta_N & \zeta_N^2 & \dots & \zeta_N^{N-1} \\ 1 & \zeta_N^2 & \zeta_N^4 & \dots & \zeta_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta_N^{N-1} & \zeta_N^{(N-1)2} & \dots & \zeta_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

où  $\zeta_N = e^{2i\pi/N}$ . Le fait qu'il s'agit d'un isomorphisme est une conséquence du théorème 2.1 p. 21. Notons comme précédemment  $c_n = Ff(n)$  pour tout entier  $n$ . On a alors :

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = F_N \cdot \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix}$$

On peut alors interpréter la transformée de Fourier rapide comme étant une factorisation commode de la matrice  $F_{2^\mu}$  en un produit de trois matrices contenant beaucoup de zéros, ce qui réduit le nombre de multiplications à faire quand on calcule l'image d'un vecteur. Les matrices  $2^\mu \times 2^\mu$  sont constituées de quatre blocs de taille  $2^{\mu-1} \times 2^{\mu-1}$ , et la factorisation annoncée est la suivante :

$$F_{2^\mu} = \left( \begin{array}{c|c} I_{2^{\mu-1}} & D_{2^{\mu-1}} \\ \hline I_{2^{\mu-1}} & -D_{2^{\mu-1}} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c} F_{2^{\mu-1}} & 0 \\ \hline 0 & F_{2^{\mu-1}} \end{array} \right) \cdot S_{2^\mu}$$

L'une de ces trois matrices est une matrice « diagonale par blocs » faisant intervenir la transformée de Fourier au rang  $\mu-1$ . On peut à nouveau factoriser une telle matrice en un produit de trois matrices, et ainsi de suite. La matrice  $I_{2^{\mu-1}}$  est la matrice identité :

$$I_{2^{\mu-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice  $D_{2^{\mu-1}}$  est la matrice diagonale suivante :

$$D_{2^{\mu-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \zeta^{2^{\mu-1}-1} \end{pmatrix}$$

La matrice  $S_{2^\mu}$  est la matrice de permutation qui permute les coordonnées des vecteurs de la manière suivante :

$$S_{2^\mu} \cdot \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ \vdots \\ f(2^\mu-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(2^{\mu-1}) \\ f(1) \\ f(2^{\mu-1}+1) \\ f(2) \\ f(2^{\mu-1}+2) \\ \vdots \\ f(2^\mu-1) \end{pmatrix}$$

*Remarque* : on obtient la matrice  $S_{2^\mu}$  à partir de la matrice identité  $I_{2^\mu}$  en appliquant cette même permutation aux colonnes de  $I_{2^\mu}$ .

### 2.2.4 Et si $N$ n'est pas une puissance de 2 ?

Il existe des factorisations analogues dans les cas où  $N$  n'est pas une puissance de 2. Sans en faire la théorie générale, on en donnera un exemple, pour  $N = 12$  :

$$F_{12} = \left( \begin{array}{c|c|c} I_{12} & D & D^2 \\ \hline I_{12} & \zeta_{12}^4 D & \zeta_{12}^8 D^2 \\ \hline I_{12} & \zeta_{12}^8 D & \zeta_{12}^{16} D^2 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c|c} F_4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & F_4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & F_4 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{array} \right)$$

La matrice diagonale  $D$  est définie par :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_{12}^3 \end{pmatrix}$$

Remarquons d'ailleurs que cette factorisation est le premier exemple de transformée de Fourier rapide connu ; Gauss l'utilise vers 1805 dans ses recherches en astronomie sur l'astéroïde Pallas.

### 2.2.5 Transformée de Fourier rapide en C++, Matlab et Scilab

En pratique, la transformée de Fourier discrète permet aussi de calculer par approximation les coefficients de Fourier d'une fonction définie sur un intervalle.

**Exercice 2.2** On considère la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur l'intervalle  $[0, 2\pi[$  par :

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

Pour une telle fonction, la formule permettant de calculer les coefficients de Fourier  $c_k$  est :

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Pour calculer cette intégrale de manière approchée, on échantillonne  $f(x)$  en des points régulièrement espacés : on divise la période par un entier  $N$ , et on ne s'intéresse plus qu'aux valeurs de  $f$  en les points  $x = \frac{2\pi n}{N}$ , pour  $0 \leq n \leq N-1$ .

Notons  $g : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par :

$$g(n) = f\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$$

On a alors

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(n) e^{-\frac{2i\pi kn}{N}}$$

On reconnaît la transformée de Fourier discrète de  $g$ . Pour  $N=8$ , calculez ces coefficients à la main par transformée de Fourier rapide.

Dans les pages qui suivent, on donne trois listings en C++, Matlab et Scilab. Ils font tous la même chose : calcul de la transformée de Fourier discrète de  $g$  pour  $N=2^\mu$ . Ils donnent les valeurs des dix premiers coefficients de Fourier  $b_n = i(c_n - c_{-n})$  pour  $3 \leq \mu \leq 7$ . On voit que ces valeurs approchées tendent bien, quand  $\mu$  augmente, vers les valeurs exactes que l'on peut déterminer par un simple calcul de primitives :

$$b_n = \frac{1}{n}$$

Le listing en C++ produit la sortie suivante :

(N=8) les coefficients b : 0.948+0.000i 0.393+0.000i 0.163+0.000i

(N=16) les coefficients b : 0.987+0.000i 0.474+0.000i 0.294+0.000i  
0.196+0.000i 0.131+0.000i 0.081+0.000i 0.039+0.000i

(N=32) les dix premiers coefficients b : 0.997+0.000i 0.494+0.000i  
0.324+0.000i 0.237+0.000i 0.184+0.000i 0.147+0.000i 0.120+0.000i  
0.098+0.000i 0.081+0.000i 0.066+0.000i

(N=64) les dix premiers coefficients b : 0.999-0.000i 0.498-0.000i  
0.331+0.000i 0.247-0.000i 0.196+0.000i 0.162-0.000i 0.137+0.000i  
0.119+0.000i 0.104-0.000i 0.092+0.000i

(N=128) les dix premiers coefficients b : 1.000+0.000i 0.500+0.000i  
0.333-0.000i 0.249-0.000i 0.199+0.000i 0.165+0.000i 0.141+0.000i  
0.123-0.000i 0.109-0.000i 0.098-0.000i

### 3 Transformée de Fourier des fonctions $L^1(\mathbb{R}^n)$

#### 3.1 Espaces $L^1$ et $L^2$ : rappels

En théorie de l'intégration, on considère souvent l'ensemble des fonctions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dont l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  est *absolument convergente*. Cet ensemble est un espace vectoriel que l'on note  $L^1(\mathbb{R})$  en référence à Lebesgue :

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ intégrable sur tout intervalle fini, et } \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^M |f(x)| dx < +\infty \right\}$$

Cet espace contient des fonctions  $f$  discontinues, en particulier il est bien possible que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = 0$$

sans que  $f$  soit nulle. On dit alors que  $f$  est « nulle presque partout ». Plus généralement, si  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - g(x)| dx = 0,$$

```

#include <fftw3.h>          // FFTW (fast Fourier transform)

#include <cstdio>
#include <ctime>
#include <cmath>

// compiler et lier avec g++ fft.cc -lfftw3

double f(double x)
{
    return ((M_PI-x)/2);
}

int main ()
{
    fftw_complex *in, *out;
    fftw_plan p;
    int N;

    for (int m=3; m<8; m+=1) {

        N=1 << m; // c'est-a-dire N = 2^m

        in = (fftw_complex*) fftw_malloc(sizeof(fftw_complex) * N);
        out = (fftw_complex*) fftw_malloc(sizeof(fftw_complex) * N);

        // echantillonnage de la fonction f
        for (int i=0; i<N; i+=1) {
            in[i][0]=f(2*M_PI*i/N);
            in[i][1]=0;
        }

        // transformee de Fourier rapide :
        // parties reelle et imaginaire du coefficient c(n)
        // seront stockees dans out[n][0] et out[n][1]
        clock_t begin, end;
        int M=10000;
        begin = clock();
        for (int i=0; i<M; i++) {
            p = fftw_plan_dft_1d(N, in, out, FFTW_FORWARD, FFTW_ESTIMATE);
            fftw_execute(p);
            fftw_destroy_plan(p);
        }
        end = clock();
        int t = (end-begin)/M;

        printf("N=%i", N);
        if (N > 20) printf(" les dix premiers coefficients b : ");
        else printf(" les coefficients b : ");

        for (int n=1; (n < N/2) && (n < 11); n+=1) {
            printf("%.3f", (out[N-n][1]-out[n][1])/N);
            if (out[n][0] >= out[N-n][0]) printf("+");
            printf("%.3fi ", (out[n][0]-out[N-n][0])/N);
            // On affiche i(c(n)-c(N-n)).
            // La transformee n'est pas normalisee comme chez nous,
            // il faut donc tout diviser par N.
        }
        printf("\ntemps de calcul = %i ticks (%.3f ms)\n",
            t, (float)(t*1000)/CLOCKS_PER_SEC);
        printf("\n\n");

        fftw_free(in); fftw_free(out);
    }
    return(0);
}

```

TAB. 1 : Transformée de Fourier rapide en C++ : exemple d'utilisation de la bibliothèque FFTW

```

for m=3 :7
    N=2^m;
    in=(pi-((2*pi).*(0 :1 :(N-1))./N))./2;
    out=fft(in)/N;

    fprintf(1, '(N=%d)', N);
    if (N > 20) fprintf(1, ' les dix premiers coefficients b : ')
    else fprintf(1, ' les coefficients b : '), end;

    for n=1 :(min(N/2,11))
        b=i*(out(n+1)-out(N-n+1)); % attention les indices sont decales de 1
        fprintf(1, '%5.3f', real(b));
        if (imag(b)>=0) fprintf(1, '+'), end;
        fprintf(1, '%5.3fi ', imag(b));
    end;
    fprintf(1, '\n\n');
end

```

TAB. 2 : Transformée de Fourier rapide avec Matlab

```

function y=f(x);
    y=(%pi-x)./2;
endfunction;

for m=3 :7
    N=2**m;
    in=f((2*%pi).*[0 :1 :(N-1)]./N);
    out=fft(in)/N;

    mprintf("(N=%d)", N);
    if (N > 20) then, mprintf(" les dix premiers coefficients b : ")
    else, mprintf(" les coefficients b : "), end;

    for n=1 :(min(N/2,11))
        b=%i*(out(n+1)-out(N-n+1)); // attention indices decales de 1
        mprintf("%5.3f", real(b));
        if (imag(b)>=0) then, mprintf("+"), end;
        mprintf("%5.3fi ", imag(b));
    end;
    mprintf("\n\n");
end

```

TAB. 3 : Transformée de Fourier rapide avec Scilab

on dit que  $f$  et  $g$  sont « égales presque partout ». Modulo cette relation d'équivalence, on peut définir une norme qui fait de  $L^1(\mathbb{R})$  un espace vectoriel normé :

$$\|f\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$$

On définit de même l'espace des fonctions *de carrés intégrables* et sa norme :

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ intégrable sur tout intervalle fini, et } \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^M |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}$$

$$\|f\|_{L^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$$

Cette norme est d'ailleurs en rapport avec un produit scalaire défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Enfin, on peut aussi définir des espaces de fonctions de plusieurs variables  $L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Il faut pour cela connaître le *théorème de Fubini*. On l'énoncera ici seulement dans le cas de deux variables ( $n = 2$ ).

**Théorème 3.1 (Fubini)** *Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction telle que, pour tout  $y$  fixé, la fonction  $x \mapsto f(x, y)$  soit intégrable sur tout intervalle fini, et que, pour tout  $x$  fixé, la fonction  $y \mapsto f(x, y)$  soit intégrable sur tout intervalle fini. Supposons d'autre part que, pour tout  $y$ ,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)| dx < +\infty,$$

*et que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)| dx \right) dy < +\infty.$$

*Alors on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right) dx$$

*Comme ces deux nombres sont égaux, on adopte une notation unique pour les désigner :*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$$

On aura aussi besoin du théorème suivant :

**Théorème 3.2 (convergence dominée)** *Soit  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une suite de fonctions intégrables sur tout intervalle fini, et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à valeurs positives telle que*

$$(\forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}) \quad |f_n(x)| \leq g(x)$$

et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx < +\infty.$$

On suppose d'autre part que la suite  $f_n(x)$  converge pour tout  $x$  et on note

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

On a alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx$$

### 3.2 Transformée de Fourier : définition

Soit  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $L^1$ , on peut alors définir sa *transformée de Fourier* :

$$\begin{aligned} \hat{f}: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \xi &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-i \langle \xi, x \rangle) dx \end{aligned}$$

**Propriété 3.1** Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , alors  $\hat{f}$  est une fonction continue.

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée à l'intégrale suivante :

$$\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) [\exp(-i \langle \xi + h, x \rangle) - \exp(-i \langle \xi, x \rangle)] dx$$

### 3.3 Théorème fondamental

**Théorème 3.3** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Supposons que  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Alors la fonction  $f$  est presque partout égale à  $x \mapsto \hat{\hat{f}}(-x)/(2\pi)^n$ .

**Lemme 3.1** Pour tout  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , pour tout  $h \in \mathbb{R}^n$ , notons  $\tau_h f$  la fonction définie par

$$t \mapsto \tau_h f(t) = f(t - h)$$

Alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f - \tau_h f\|_{L^1} = 0$$

*Démonstration :* ce lemme peut être démontré par densité de  $C_0^\infty$  dans  $L^1$  (voir résultats de densité analogues dans la première partie du cours – l'espace  $C_0^\infty$  est l'ensemble des fonctions  $C^\infty$  à support compact).

**Lemme 3.2** Soit  $f(x) = \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2}\right)$ . Alors :

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \exp\left(-\frac{\|\xi\|^2}{2}\right).$$

Autrement dit, les gaussiennes sont des « vecteurs propres » de la transformée de Fourier, de valeur propre  $(2\pi)^{n/2}$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \int \exp(-x^2/2) \exp(-ix\xi) dx &= \int \exp\left(-\frac{x^2 + 2ix\xi}{2}\right) dx \\ &= \int \exp\left(-\frac{(x+i\xi)^2 + \xi^2}{2}\right) dx \\ &= \exp(-\xi^2/2) \int \exp\left(-\frac{(x+i\xi)^2}{2}\right) dx \end{aligned}$$

Posons alors  $g(\xi) = \int \exp\left(-\frac{(x+i\xi)^2}{2}\right) dx$ . On peut montrer que  $g$  est constante (arguments de convergence justifiant la dérivation à l'intérieur du signe  $f$ ). Mais on a aussi (résultat classique sur les gaussiennes démontré dans tous les livres de proba) :

$$g(0) = \int \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = (2\pi)^{n/2}$$

Le lemme est ainsi démontré.

*Démonstration du théorème.* Il faut montrer que, « presque partout » :

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-i \langle \xi, x-t \rangle) dx d\xi = f(t)$$

A cet effet, posons, pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$g_\epsilon(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int f(x) \exp(-i \langle \xi, x-t \rangle) \exp(-\epsilon \xi^2/2) dx d\xi$$

On montre facilement que, lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, pour tout  $t$ , et même uniformément pour  $t$  situé dans n'importe quel intervalle fini,  $g_\epsilon(t)$  a pour limite

$$g(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-i \langle \xi, x-t \rangle) dx d\xi$$

Mais on peut aussi transformer  $g_\epsilon$  au moyen d'un changement de variable en posant  $\eta = \xi \sqrt{\epsilon}$ .

$$g_\epsilon(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int f(x) \left( \int \exp(-\eta^2/2) \exp\left(-i \left\langle \eta, \frac{x-t}{\sqrt{\epsilon}} \right\rangle\right) \frac{d\eta}{(\sqrt{\epsilon})^n} \right) dx$$

La transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne :

$$g_\epsilon(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int f(x) \exp\left(-\frac{\left(\frac{x-t}{\sqrt{\epsilon}}\right)^2}{2}\right) (2\pi)^{n/2} \frac{dx}{(\sqrt{\epsilon})^n}$$

Changement de variable  $x \mapsto x\sqrt{\epsilon} + t$ .

$$g_\epsilon(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(x\sqrt{\epsilon} + t) \exp(-x^2/2) dx$$

Mais remarquez que

$$f(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(t) \exp(-x^2/2) dx$$

Donc

$$\int |g_\epsilon(t) - f(t)| dt = \iint |f(x\sqrt{\epsilon} + t) - f(t)| \exp(-x^2/2) dx dt$$

Le lemme 3.1 et le théorème de convergence dominée permettent de conclure que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|g_\epsilon - f\|_{L^1} = 0$$

On conclut en remarquant que

$$\int |g - f| \leq \int |g - g_\epsilon| + |g_\epsilon - f|$$

### 3.4 Exercices

**Exercice 3.1 (application aux probabilités)** *En probabilités, on rencontre souvent des « lois normales ». Dans un modèle à loi normale d'espérance  $m$  et d'écart-type  $\sigma$ , la probabilité qu'une variable aléatoire ait une valeur comprise dans l'intervalle  $[a, b]$  est égale à l'intégrale suivante :*

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

On dit aussi que la « densité de probabilité » de la loi normale est la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Plus généralement, on dit qu'une variable aléatoire  $X$  a une densité de probabilité  $f$  si

$$p(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x) dx$$

On définit la « fonction caractéristique »  $\Phi_X$  d'une telle variable aléatoire comme étant la transformée de Fourier de sa densité de probabilité :

$$\Phi_X = \hat{f}$$

Si  $X$  suit une loi normale d'espérance  $m_1$  et d'écart-type  $\sigma_1$ , que  $Y$  suit une loi normale d'espérance  $m_2$  et d'écart-type  $\sigma_2$ , et que  $Z$  suit une loi normale d'espérance  $(m_1 + m_2)$  et d'écart-type  $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ , montrez qu'alors

$$\Phi_X \Phi_Y = \Phi_Z$$

Remarque : ceci montre (cf. cours proba) que la somme de deux variables aléatoires normales indépendantes est encore une variable normale.

**Exercice 3.2 (théorème d'échantillonnage)** *Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction dont la transformée de Fourier est nulle en dehors de l'intervalle  $[-1/2, 1/2]$ . On va montrer que la fonction est entièrement déterminée par ses valeurs  $f(n)$  aux entiers  $n \in \mathbb{Z}$ . Concrètement, ce serait par exemple le cas d'un signal  $f(t)$  dont la gamme de fréquences est 1/2 hertz : si on le mesurait une fois par seconde, on pourrait reconstituer le signal exactement.*

*Plus généralement, la fréquence d'échantillonnage d'un signal doit être égale ou supérieure au double de la fréquence maximale de son spectre. C'est ainsi*

que l'on détermine la fréquence d'échantillonnage d'un CD audio. En effet, l'oreille humaine peut capter les sons jusqu'à 20 kHz. Il convient donc, lorsque l'on convertit le signal sonore en un signal numérique, de l'échantillonner à au moins 40 kHz. L'industrie a adopté la valeur 44,1 kHz.

1. Soit  $g(\tau)$  la fonction de période 1 qui coïncide avec  $\hat{f}(\tau)$  sur l'intervalle  $[-1/2, 1/2]$ . Calculer les coefficients de Fourier de  $g$ .
2. Au moyen du théorème d'inversion de Fourier, montrer que

$$f(t) = \int_{-1/2}^{1/2} g(\tau) \exp(i\tau t) d\tau$$

3. Si  $\hat{f}$  est suffisamment régulière, montrez que l'on peut remplacer  $g(\tau)$  par sa série de Fourier dans l'expression ci-dessus, puis échanger les signes  $\int$  et  $\sum$ . Montrez qu'on a alors

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \frac{\sin(\pi(n-t))}{\pi(n-t)}$$

## 4 Transformée de Laplace

**Exercice 4.1** On définit ici la transformée de Laplace d'une fonction  $f$  et on établit quelques propriétés élémentaires qu'on utilisera lors des exercices suivants. Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable sur tout intervalle fini, et  $x_0 \in \mathbb{R}$ . De plus, on suppose que  $t \mapsto e^{-tx_0} f(t)$  est bornée.

1. Montrer que l'application  $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t) dt$  est définie et continue sur l'intervalle  $]x_0, +\infty[$ .
2. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ .
3. Montrer que  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $]x_0, +\infty[$  et que

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-tx} f(t) dt$$

4. Montrer que  $F$  est  $C^\infty$  sur  $]x_0, +\infty[$  et donner l'expression de  $F^{(n)}$ .

**Exercice 4.2** Soit  $f \in L^1([0, +\infty[)$ . Montrer que la transformée de Laplace de  $f$  est définie et de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ , qu'elle tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , et qu'elle se prolonge par continuité en 0. Et pour  $f \in L^2([0, +\infty[)$  ?

**Exercice 4.3** Soit  $f(t) = \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}$ .

- a) Montrer que la transformée de Laplace de  $f$ , notons-la  $F$ , est ici définie sur  $]0, +\infty[$  et qu'elle se prolonge par continuité en 0 en posant  $F(0) = \pi$ .
- b) On pose

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$$

Montrer que :

$$(\forall x \in ]0, +\infty[) \quad F'(x) - F(x) = \frac{-A}{\sqrt{x}}$$

c) Intégrer cette équation pour trouver la valeur de  $A$  (on laissera sous forme intégrale l'expression d'une solution particulière).

d) Que vaut  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$  ?

## 5 Théorie des distributions

Dans les applications, la notion même de fonction est souvent inadaptée. En effet, considérons une quantité  $y$  dont la variation dépend d'une autre quantité variable  $x$  :

$$y = f(x)$$

Il est souvent impossible de déterminer de manière exacte la valeur que prend  $y$  lorsque  $x$  prend précisément *une* valeur donnée. Ainsi lorsque  $x$  et  $y$  sont des grandeurs physiques, et que la grandeur  $y$  est mesurée par un capteur, le capteur ne renvoie jamais la valeur de  $y$  correspondant à un point  $x_0$  précis. Il renvoie seulement une valeur *moyenne* de  $y$  au voisinage du point  $x_0$ . Il renvoie une moyenne de toutes les valeurs de  $y$ , moyenne pondérée de sorte que les valeurs de  $y$  au voisinage du point  $x_0$  comptent davantage. Une telle moyenne pondérée s'écrit

$$\frac{\int \phi(x) f(x) dx}{\int \phi(x) dx}$$

où  $\phi(x) dx$  est le poids accordé à la valeur  $f(x)$ . Pour que ce nombre nous renseigne sur les valeurs de  $y$  au voisinage de  $x_0$ , il faut que la fonction  $\phi$  soit nulle partout sauf dans un voisinage de  $x_0$  où elle doit avoir la forme d'un pic étroit. Par exemple, la fonction  $\phi$  suivante présente un pic de largeur  $2a$  au voisinage de 0 :

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-(x/a)^2}\right) & \text{si } x \in ]-a, a[ \\ 0 & \text{si } x \notin ]-a, a[ \end{cases}$$

D'ailleurs, on remarque que cette fonction est  $C^\infty$ . Un tel  $\phi$  est appelé « fonction test ». Alors on ne s'intéresse plus tant à la fonction  $x \mapsto f(x)$  qu'à l'application

$$\phi \mapsto \int f(x) \phi(x) dx$$

C'est une application linéaire qui à toute « fonction test » associe un nombre réel ou complexe. On appelle cela une « forme linéaire » de l'espace des fonctions tests. Et une telle forme linéaire est appelée « distribution ». On note aussi :

$$\langle f, \phi \rangle = \int f(x) \phi(x) dx$$

Mais pourquoi se restreindre aux distributions construites comme ci-dessus à partir d'une fonction classique  $f$  ? On peut à présent étendre le concept de « distribution ». Pour définir une distribution, il suffit d'avoir une forme linéaire

de l'espace des « fonctions tests ». *Exemple : la masse de Dirac.* On considère l'application :

$$\phi \longmapsto \phi(x_0)$$

Cette application est bien une forme linéaire de l'espace des fonctions tests : si  $\phi$  et  $\psi$  sont deux fonctions tests et  $a$  un réel quelconque, on a bien

$$\phi + a\psi \longmapsto (\phi + a\psi)(x_0) = \phi(x_0) + a\psi(x_0)$$

Et cette application définit une distribution, que l'on appelle « masse de Dirac en  $x_0$  » et que l'on note  $\delta_{x_0}$ . On note aussi :

$$\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \phi(x_0)$$

Les physiciens de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle avaient déjà coutume d'utiliser la masse de Dirac ; il la concevaient comme une sorte de fonction valant partout 0 sauf en  $x_0$  où elle vaut  $+\infty$ .

## 5.1 Espace de Schwartz et distributions tempérées

Pour faire de l'analyse de Fourier, on s'intéresse à certains espaces de fonctions et de distributions. On choisit l'espace suivant comme espace des fonctions tests :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ \phi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \frac{\partial^\beta \phi}{\partial x^\beta} = 0 \right\}$$

C'est un espace vectoriel. Pour tout  $q \in \mathbb{N}$ ,  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , on note :

$$N_q(\phi) = \sum_{\substack{\alpha \leq q \\ \beta \leq q}} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^\alpha \frac{\partial^\beta \phi}{\partial x^\beta} \right|$$

On remarque que l'espace des fonctions  $C^\infty$  à support compact, noté  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ , est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Soit  $T$  une forme linéaire sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . On dit que  $T$  est une distribution tempérée s'il existe  $q \in \mathbb{N}$  et  $c > 0$  tels que

$$(\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})) \quad \langle T, \phi \rangle \leq c N_q(\phi)$$

L'ensemble des distributions tempérées est noté  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  ; c'est un espace vectoriel.

*Exemples de distributions.*

1. Toute fonction  $f \in L^1(\mathbb{R})$  définit une distribution tempérée :

$$\phi \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)dx$$

2. Toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$  aussi.
3. Toute fonction  $f$  périodique, bornée et intégrable sur tout intervalle fini, aussi.
4. La masse de Dirac  $\delta_{x_0}$  est une distribution tempérée.

Remarquons que ces constructions s'étendent au cas de plusieurs variables : on peut définir de même des espaces  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

## 5.2 Transformée de Fourier des distributions

Les fonctions tests sont  $L^1(\mathbb{R})$ . Elles ont donc chacune une transformée de Fourier. Or on peut montrer que :

$$(\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})) \quad \hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Ceci permet de définir la *transformée de Fourier d'une distribution tempérée*. Soit  $T$  une distribution tempérée. Sa transformée de Fourier est la distribution tempérée  $\hat{T}$  définie par :

$$\langle \hat{T}, \phi \rangle = \langle T, \hat{\phi} \rangle$$

On peut vérifier que cette définition coïncide avec la transformée de Fourier des fonctions  $L^1$  quand la distribution  $T$  est une fonction  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

## 5.3 Transformée de Fourier d'une fonction périodique

Soit une fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  périodique de période  $2\pi$ , bornée et intégrable sur tout intervalle fini. Elle définit une distribution  $T$  :

$$T: \phi \mapsto \langle T, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)dx$$

On peut montrer que la transformée de Fourier de  $T$  s'écrit au moyen de masses de Dirac :

$$\langle \hat{T}, \phi \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \langle \sum_{-N}^N 2\pi c_n \delta_n, \phi \rangle = \sum_{-\infty}^{+\infty} 2\pi c_n \phi(n)$$

où les coefficients  $c_n$  ne sont autres que les coefficients de Fourier de  $f$ . On peut aussi montrer que

$$\langle T, \phi \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \langle \sum_{-N}^N c_n e^{inx}, \phi \rangle$$

On retrouve ainsi les séries de Fourier à partir de la théorie des distributions. La transformée de Fourier de la fonction  $x \mapsto e^{inx}$  est  $2\pi\delta_n$ .

## 5.4 Application : théorie de la diffraction

**Exercice 5.1** Pour calculer la figure de diffraction d'une ouverture de transmittance  $T(x)$ , la théorie de Fresnel-Kirchhoff nous conduit à calculer la transformée de Fourier de la transmittance :

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} T(x) dx$$

On considère une ouverture consistant en une « double fente » :  $T(x)$  est égal à 0 pour les parties opaques et 1 sur la surface des trous (voir figure 7).

- (i) Exprimer la fonction de transmittance de cette ouverture en la symétrisant.
- (ii) Plaçant l'écran loin de l'ouverture, calculer l'équation de la figure de diffraction.
- (iii) Montrer que cette figure est la modulation par l'effet de diffraction de la figure d'interférence créée par les deux fentes.

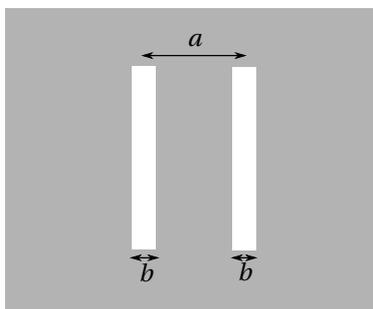


FIG. 7 : Double fente

- (iv) Paramétriser en fonction de  $a$  et de  $b$  les largeurs  $\theta_1$  caractéristiques de la figure de diffraction (lobe central) et  $\theta_2$  de la figure d'interférence (interfrange angulaire).
- (v) Qu'observera-t-on lorsque  $b$  tend vers 0 ?
- (vi) On pose  $b = 200 \mu\text{m}$  et  $a = 500 \mu\text{m}$ . Calculer la largeur  $\theta_1$  du lobe central de la figure de diffraction.
- (vii) Calculer l'interfrange  $\theta_2$  des raies d'interférence.

Remarque : cet exercice nécessite quelques notions d'optique (interférences, diffraction...).

**Exercice 5.2** La diffraction des rayonnements est un outil pour déterminer l'arrangement des atomes dans un solide cristallin : on va voir qu'elle permet par exemple de déterminer les dimensions d'une maille d'un réseau d'atomes. On considère un réseau cristallin dont les vecteurs de bases sont  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . C'est-à-dire que le cristal est invariant par toute translation de vecteur  $h\vec{a} + k\vec{b} + l\vec{c}$  pour  $h, k, l \in \mathbb{Z}$ . La densité électronique qui décrit la position des électrons des atomes du cristal est donc une fonction  $\rho(\vec{r})$  qui possède trois périodes  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . L'étude du phénomène de diffraction (théorie de Fresnel-Kirchhoff...) montre que l'amplitude de l'onde diffusée dans la direction  $\vec{k}_h$  est proportionnelle à l'intégrale suivante (appelée facteur de structure) :

$$F_h = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}) \exp(-2\pi i(\vec{k}_h - \vec{k}_0) \cdot \vec{r}) d\vec{r}$$

où  $\vec{k}_0$  est la direction des rayons incidents.

(i) On pose

$$\vec{A} = \frac{\vec{b} \wedge \vec{c}}{(\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a}}, \quad \vec{B} = \frac{\vec{c} \wedge \vec{a}}{(\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b}}, \quad \vec{C} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}}$$

Montrer que ces trois vecteurs constituent un réseau « réciproque » du réseau engendré par  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , au sens où, pour tout vecteur  $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ , on a :

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = x, \quad \vec{B} \cdot \vec{r} = y, \quad \vec{C} \cdot \vec{r} = z$$

Réciproquement, montrez que le réseau réciproque du réseau engendré par  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  est le réseau engendré par  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

- (ii) Montrer que le facteur de structure  $F_h$  est nul sauf si le vecteur  $\vec{k}_h - \vec{k}_0$  appartient au réseau réciproque. Les intensités des taches de diffraction mesurées expérimentalement nous informent donc sur les directions  $\vec{k}_h$  dans lesquelles l'amplitude est non nulle, c'est-à-dire sur la structure du réseau réciproque engendré par  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ . On peut ensuite remonter au réseau  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , qui nous livre une information sur la carte de densité électronique du cristal.

## 5.5 Transformée de Fourier des fonctions $L^2$

L'espace  $L^2(\mathbb{R})$  n'est pas inclus dans  $L^1(\mathbb{R})$ , et il semble difficile de définir la transformée de Fourier d'une fonction  $L^2$  comme on l'a fait pour  $L^1$ . Mais les fonctions  $L^2$  sont des distributions tempérées, et on peut donc leur appliquer la transformée de Fourier aussi. La transformée de Fourier d'une fonction  $L^2$  est une distribution tempérée, mais c'est en fait aussi une fonction  $L^2$ . Le théorème suivant précise ce résultat. On ne le démontrera pas.

**Théorème 5.1 (Plancherel)** *Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$  une fonction, alors sa transformée de Fourier (au sens des distributions tempérées) est une fonction  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ . De plus, l'application linéaire suivante est une isométrie pour la norme  $L^2$  :*

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f} \end{aligned}$$

C'est-à-dire que

$$\left\| \frac{\hat{f}}{\sqrt{2\pi}} \right\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$