Intégrale de Riemann et applications

Erwan Penchèvre

L2 2008

Il est remarquable qu'un concept unique, l'*intégrale*, permet de résoudre deux classes de problèmes qui ne présentent apparemment aucun lien entre elles. De la première relèvent les problèmes de calcul d'aires et de volumes. Par exemple, l'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses, deux abscisses a et b, et un segment de courbe d'équation $y = f(x)$ s'exprime et se calcule en général par une intégrale :

$$\int_a^b f(x)dx$$

On verra que le volume compris entre une surface d'équation $y = f(x, y)$ et une partie finie du plan xOy peut aussi s'exprimer par une *intégrale double* :

$$\iint f(x,y)dxdy$$

La deuxième classe de problèmes est celle des *équations différentielles*. L'exemple fondamental est le suivant : soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, il faut trouver F telle que :

$$\forall x \in [a,b] \quad F'(x) = f(x)$$

Equation que l'on note aussi parfois, en introduisant la variable $y = F(x)$:

$$dy = f(x)dx$$

L'intégrale suivante en donne une solution :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

On l'a vu dans les exemples précédents, l'intégrale est une opération sur les fonctions. Il faudra donc bien préciser à quelles fonctions on peut appliquer cette opération. Autrement dit, toutes les fonctions sont-elles *intégrables*, et sinon, lesquelles ? L'extension du concept d'intégrale dépendra de la manière dont on construit ce concept. Dans ce cours, on verra la construction due à Riemann (1854). Intuitivement, on s'attend à ce que toute fonction continue sur un intervalle fini soit intégrable, et c'est la condition qui a rendu possible les travaux plus anciens sur l'intégration (Archimède puis les géomètres arabes au moyen-âge, Leibniz au XVII^{e} siècle,...). Mais la construction de l'intégrale de Riemann peut s'étendre de manière rigoureuse à une classe plus large de fonctions, voire même, moyennant quelques précautions, à des fonctions définies sur un intervalle infini. Par exemple, on donnera un sens à l'égalité suivante :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$$

D'autres constructions plus récentes encore (début XX$^{\text{ème}}$ siècle, la « théorie moderne de l'intégration », *cf.* cours L3 ou master), équivalentes à l'intégrale de Riemann pour les fonctions continues sur un intervalle fini, s'étendent même à des classes encore plus vastes de fonctions.

Dernière remarque : l'intégration est un peu l'opération inverse de la dérivation. C'est ce qui en fait un outil important pour résoudre les équations différentielles. Mais si le calcul d'une dérivée est souvent assez simple, le calcul d'une primitive l'est beaucoup moins ; peut-être parce l'intégrale d'une fonction dépend du comportement global de cette fonction – là où sa dérivée en un point ne dépend que de son comportement au voisinage de ce point.

1 L'intégrale de Riemann

1.1 Définitions

Dans tout ce chapitre, on considère un intervalle fini $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.1 (subdivision d'un intervalle) *On appelle subdivision de l'intervalle* $[a,b]$ *la donnée d'une suite finie* $(s_i)_{0\leq i\leq n}$ *avec :*

$$a = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n = b$$

La subdivision (s_i) est dite *plus fine* que la subdivision (t_j) si

$$\{t_j\}_{0\leq j\leq m} \subset \{s_i\}_{0\leq i\leq n}$$

Il revient au même de dire que :

$$\forall i \quad \exists j \quad t_j \leq s_i \leq s_{i+1} \leq t_{j+1}$$

On appelle *pas de la subdivision* (s_i) le nombre suivant :

$$\max_{0\leq i\leq n-1} (s_{i+1} - s_i)$$

Lemme 1.1 *Si* (s_i) *et* (t_j) *sont deux subdivisions de* $[a,b]$*, alors il existe une subdivision* (u_k) *de* $[a,b]$ *plus fine à la fois que* (s_i) *et que* (t_j)*.*

Soit une fonction f bornée sur $[a,b]$, et (s_i) une subdivision de $[a,b]$.

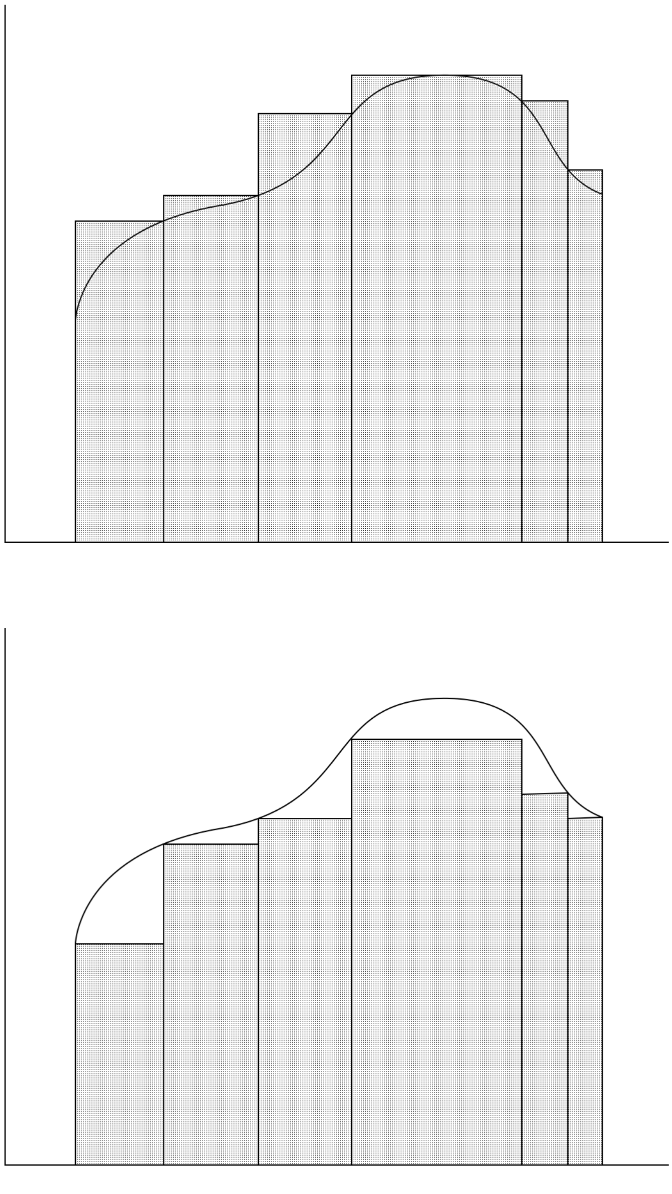
Définition 1.2 (sommes de Darboux) *On appelle* somme de Darboux inférieure relative à f et à (s_i) *le nombre :*

$$S^-_{f,(s_i)} = \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i) \inf_{[s_i,s_{i+1}]} f$$

On définit de même la somme de Darboux supérieure :

$$S^+_{f,(s_i)} = \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i) \sup_{[s_i,s_{i+1}]} f$$

Fig. 1 : Sommes de Darboux supérieure et inférieure



Définition 1.3 (intégrale de Riemann) *On dit que la fonction f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si*

$$\sup_{(s_i)\in\mathscr{S}([a,b])} S^-_{f,(s_i)} = \inf_{(s_i)\in\mathscr{S}([a,b])} S^+_{f,(s_i)}$$

*où $\mathscr{S}([a,b])$ désigne l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$. La valeur commune des bornes inférieure et supérieure est alors, par définition, l'*intégrale de Riemann *de f sur $[a,b]$ qu'on note :*

$$\int_a^b f(x)dx$$

Lemme 1.2 *Si (s_i) est une subdivision plus fine que (t_j), on a :*

$$S^-_{f,(t_j)} \leq S^-_{f,(s_i)} \leq S^+_{f,(s_i)} \leq S^+_{f,(t_j)}$$

Lemme 1.3

$$\sup_{(s_i)\in\mathscr{S}([a,b])} S^-_{f,(s_i)} \leq \inf_{(s_i)\in\mathscr{S}([a,b])} S^+_{f,(s_i)}$$

1.2 Quelques classes de fonctions intégrables

Théorème 1.1 (fonctions continues sur un intervalle fini) *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, alors f est intégrable au sens de Riemann.*

Lemme 1.4 (uniforme continuité) *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, alors c'est une fonction* uniformément continue, *c'est-à-dire que :*

$$\forall\epsilon \quad \exists\eta \quad \forall x,y \quad |x-y|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon$$

Théorème 1.2 (fonctions monotones sur un intervalle fini) *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction monotone, alors f est intégrable au sens de Riemann.*

Remarque 1.1 *Attention les théorèmes 1.1 et 1.2 ne se démontrent pas de la même façon.*

Exercice 1.1 *En utilisant la définition de l'intégrale de Riemann, montrer que :*

1) *Si f est constante égale à c sur $[a,b]$, alors f est intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$.*

2) *Si $f(x)$ est nulle sauf pour un nombre fini de valeur de x dans $[a,b]$, alors f est intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b f(x)dx = 0$.*

3) *Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ la fonction telle que $f(x)=1$ si x est rationnel et $f(x)=0$ si x est irrationnel. Alors f n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$.*

1.3 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Propriété 1.1 (sommes de Riemann et calcul approché) *Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$, et $(s_i^{(j)})_{0\leq i\leq n_j}$ une suite de subdivisions de $[a,b]$, par $j\in\mathbb{N}$. Notons δ_j le pas de la j-ème subdivision. On suppose que $\lim\delta_j = 0$. Alors :*

$$\lim_{j\to+\infty} S^+_{f,(s_i^{(j)})} = \inf_{(s_i)\in\mathscr{S}([a,b])} S^+_{f,(s_i)}$$

$$\lim_{j\to+\infty} S^-_{f,(s_i^{(j)})} = \sup_{(s_i)\in\mathscr{S}([a,b])} S^-_{f,(s_i)}$$

Donc si f est intégrable, ces deux suites convergent vers $\int_a^b f(x)dx$. Mais plus généralement, pour chaque j, on définit une somme de Riemann *:*

$$R_j = \sum_{0\le i<n_j} f(\xi_i^{(j)})(s_{i+1}^{(j)} - s_i^{(j)})$$

où $\xi_i^{(j)}$ est un réel quelconque dans l'intervalle $[s_i^{(j)}, s_{i+1}^{(j)}]$. Alors si f est intégrable, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{j\to+\infty} R_j$$

Propriété 1.2 (linéarité) *Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ et si λ et μ sont deux réels, alors la fonction $\lambda f + \mu g : x \mapsto \lambda f(x) + \mu g(x)$ est intégrable sur $[a,b]$ et on a :*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

Propriété 1.3 (inégalité triangulaire) *Si f est intégrable sur $[a,b]$, alors la fonction $|f|$ l'est également et on a :*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

Propriété 1.4 *Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ et si $f\le g$, alors*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

Propriété 1.5 (produit de fonctions intégrables) *La fonction produit de deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ est une fonction intégrable sur $[a,b]$.*

Propriété 1.6 (relation de Chasles) *Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$, et $c\in[a,b]$. La fonction f est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si elle l'est sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$, et on a alors :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Remarque 1.2 *Si f est intégrable sur $[a,b]$, on écrit par convention*

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Cette notation s'accorde bien avec la relation de Chasles.

Exercice 1.2 *En utilisant l'exercice 1.1 et la propriété 1.2, montrer que si f et g sont deux fonctions sur $[a,b]$ telles que $f(x) = g(x)$ sauf pour un nombre fini de valeurs de x, alors g est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si f l'est, et on a alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.*

Exercice 1.3 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une* fonction en escalier, *c'est-à-dire qu'il existe une subdivision* $(s_i)_{0\leq i\leq n}$ *de* $[a, b]$ *vérifiant : il existe, pour chaque* i*, une constante* c_i *tel que* $f(x) = c_i$ *sur* $]s_i, s_{i+1}[$*. Montrer que* f *est intégrable puis calculer* $\int_a^b f(x)dx$*.*

Exercice 1.4 *On dit qu'une fonction* f *sur* $[a, b]$ *est* continue par morceaux *s'il existe une subdivision* $(s_i)_{0\leq i\leq n}$ *de* $[a, b]$ *vérifiant : il existe, pour chaque* i*, une fonction continue* $g_i : [s_i, s_{i+1}] \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall x \in]s_i, s_{i+1}[\quad f(x) = g_i(x)$$

Montrer qu'une telle fonction f *est intégrable au sens de Riemann.*

Exercice 1.5 (inégalité de Hölder) [III.112-114] *Soit* $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue strictement croissante avec* $f([0, a]) = [0, b]$*.*

1) Montrer que :

$$\int_0^a f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt = ab$$

2) Montrer que, pour $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$*, on a*

$$xy \leq \int_0^x f(t)dt + \int_0^y f^{-1}(t)dt$$

et que l'on a égalité si et seulement si $y = f(x)$*.*

3) Soient des réels positifs p *et* q *tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Sachant que $\int_0^x t^{p-1}dt = (1/p)x^p$*, montrer que :*

$$\forall x, y > 0 \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

4) Soit un entier n *positif. En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe des constantes* a *et* b *telles que, pour tout couple de fonctions* f *et* g *à valeurs positives, on a :*

$$(f + g)^n \leq af^n + bg^n$$

Propriété 1.7 (changement de variable) *Soit* f *une fonction continue sur* $[a, b]$*. On veut calculer* $\int_a^b f(x)dx$*. On choisit à cet effet une nouvelle variable* y*. C'est-à-dire*[1] *qu'il existe une bijection* $u : [c, d] \to [a, b]$ *et que l'on « pose »* $x = u(y)$ *dans l'expression* $\int_a^b f(x)dx$*. On suppose de plus que* u *est dérivable et que sa dérivée* u' *est continue sur* $[a, b]$*. On a alors :*

$$\int_{u(c)}^{u(d)} f(x)dx = \int_c^d f \circ u(y)u'(y)dy$$

[1]Bien souvent, on repère au sein de l'expression $f(x)$ une quantité composée (dépendant de x) que l'on souhaite choisir comme nouvelle variable y, autrement dit on « pose » y égal à cette quantité composée, et l'on note $y = u^{-1}(x)$.

2 Calcul des primitives

2.1 Définition

Définition 2.1 *Soit F une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et $f = F'$ sa dérivée. On dit alors que F est* une primitive *de f.*

Si F est une primitive de f, alors pour toute constante $K \in \mathbb{R}$, la fonction $F + K$ est aussi une primitive de f. Toute fonction f qui a une primitive a donc en fait une infinité de primitives distinctes. Or on obtient bien ainsi toutes les primitives de f :

Théorème 2.1 *Si F_1 et F_2 sont deux primitives distinctes de f, alors $F_1 - F_2$ est une fonction constante :*

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad F_1(x) - F_2(x) = K$$

Lemme 2.1 *Soit f la fonction identiquement nulle sur l'intervalle I, et F une primitive de f. Alors F est une fonction constante.*

Reste la question de l'existence. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque, a-t-elle au moins une primitive ? On répondra à cette question dans le chapitre suivant. En attendant, grâce au tableau des dérivées des fonctions usuelles, on va pouvoir établir une liste assez vaste de fonctions ayant une primitive. Dans le tableau 1, I désigne un intervalle, x la variable, et u une fonction dérivable sur cet intervalle.

Définition 2.2 (rappel) *On définit ainsi les fonctions trigonométriques inverses :*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Arcsin} : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2] \\
&\mathrm{Arccos} : [-1,1] \to [0, \pi] \\
&\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[
\end{aligned}$$

Elles vérifient, par définition, les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\sin \circ \mathrm{Arcsin} = \mathrm{Id}_{[-1,1]} \\
&\cos \circ \mathrm{Arccos} = \mathrm{Id}_{[-1,1]} \\
&\tan \circ \mathrm{Arctan} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}
\end{aligned}$$

Arcsin *et* Arccos *sont dérivables sur* $]-1,1[$, Arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et :*

$$\mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mathrm{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Théorème 2.2 (linéarité) *Si f et g sont des fonctions, définies sur un même intervalle I, ayant des primitives F et G respectivement, et que a et b sont deux nombres réels, alors $aF + bG$ est une primitive de $af + bg$.*

Tab. 1 : Primitives des fonctions usuelles

domaine	fonction	primitive	
$\mathbb{R}$	x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$(n \in \mathbb{Z} - \{-1\})$
I	$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	
$\mathbb{R}_+^\star$	x^q	$\dfrac{x^{q+1}}{q+1}$	$(q \in \mathbb{R} - \{-1\})$
$\mathbb{R}_+^\star$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$	
I	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln \lvert u \rvert$	
$\mathbb{R}$	e^x	e^x	
I	$u'e^u$	e^u	
$\mathbb{R}$	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$(a \in \mathbb{R}_+^\star - \{1\})$
$\mathbb{R}$	$\cos$	$\sin$	
$\mathbb{R}$	$\sin$	$-\cos$	
I	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\mathrm{Arcsin}\, u$	$(u : I \to]-1,1[)$
I	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\mathrm{Arctan}\, u$	

On ne sait pas calculer la primitive d'un produit de deux fonctions. Mais sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, on peut toutefois remarquer que

$$(FG)' = fG + Fg$$

Donc FG est une primitive de $fG+Fg$. Soient P une primitive quelconque de fG, et Q une primitive quelconque de Fg, alors $P+Q$ est une primitive de $fG+Fg$, qui ne diffère donc de FG que par une constante $K \in \mathbb{R}$. On peut donc écrire :

$$P - K = FG - Q$$

Et $P - K$ est aussi une primitive de fG. On peut donc énoncer le théorème suivant qui permet dans certains cas de trouver une primitive d'un produit de deux fonctions :

Théorème 2.3 (« intégration par parties ») *Soit f et G deux fonctions définies sur un même intervalle I. Supposons G dérivable et notons g sa dérivée. Soit F une primitive de f, et Q une primitive de Fg. Alors $FG-Q$ est une primitive de fG.*

Exercice 2.1 *Pour chacune des fonctions suivantes, calculer toutes ses primitives. Préciser dans chaque cas les intervalles sur lesquels ces calculs sont valides.*

(a) $x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(b) $x^2(1-x^{1/3})$

(c) $\dfrac{x^{2/3}+1}{x^{1/3}}$

(d) $\sin(ax)\cos(bx)$

(e) $\sin(ax)\sin(bx)$

(f) $\cos(ax)\cos(bx)$

Exercice 2.2 [III.111] *Pour chacune des fonctions suivantes, calculer une primitive :*

$$(a)\ x^3e^x,\quad (b)\ \ln x,\quad (c)\ x\ln x,\quad (d)\ \mathrm{Arcsin} x,\quad (e)\ \mathrm{ch} x \sin x,\quad (f)\ e^{ax}\cos(bx).$$

On rappelle que les fonctions ch et sh sont définies comme suit, et que $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$ et $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$:

$$\mathrm{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

2.2 Primitives des fractions rationnelles

On appelle *fraction rationnelle* un quotient de deux polynômes. On montre dans cette section comment calculer les primitives d'une classe assez vaste de fractions rationnelles.

Lemme 2.2 (division euclidienne) *Soit une fraction rationnelle* $\frac{N}{D}$*. Il existe alors des polynômes* E *et* R *tels que* $N = ED + R$ *avec* $\deg R < \deg D$*. On a :*

$$\frac{N}{D} = E + \frac{R}{D}$$

Lemme 2.3 (division suivant les puissances croissantes) *Soit un quotient de polynômes* $\frac{P}{R}$ *en l'indéterminée* X *tel que* $R(0) \neq 0$*, et soit un entier quelconque* $n > 0$*. Alors il existe un polynôme* $L = l_n + l_{n-1}X + \ldots + l_1 X^{n-1}$ *et un polynôme* M *tel que* $P = LR + MX^n$*. On a :*

$$\frac{P}{RX^n} = \frac{l_n}{X^n} + \frac{l_{n-1}}{X^{n-1}} + \ldots + \frac{l_1}{X} + \frac{M}{R}$$

Théorème 2.4 *Soit une fraction rationnelle* $\frac{P}{Q}$ *où* Q *est de la forme*

$$Q = (x-a)^n R$$

avec $R(a) \neq 0$ *(on dit alors que* a *est une racine de* Q *de multiplicité* n*). Alors il existe des polynômes* E *et* M *avec* $\deg M < \deg R$*, et des réels* $l_1, l_2, \ldots, l_n$ *tels que :*

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{l_n}{(x-a)^n} + \frac{l_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{l_1}{x-a} + \frac{M}{R}$$

Dans ce théorème, $\deg R < \deg Q$, et si toutes les racines de Q sont réelles, on peut donc par récurrence sur $\deg Q$ décomposer la fraction rationnelle en la somme d'un polynôme et d'un certain nombre de quotients de la forme $\frac{l}{(x-a)^n}$ pour des réels a et l et des entiers $n \geq 0$ convenablement choisis. Plus généralement, si Q possède, outre ses racines réelles, des racines complexes de multiplicité 1, on décomposera la fraction rationnelle comme somme

1) d'un polynôme

2) de quotients de la forme précédente $\frac{l}{(x-a)^n}$

3) de quotients de la forme $\frac{lx+m}{x^2+ax+b}$

On peut démontrer l'existence d'une telle décomposition en appliquant le théorème 2.4 à chaque racine complexe a de multiplicité 1 et en regroupant deux à deux les quotients conjugués ainsi obtenus :

$$\frac{l}{x-a} + \frac{\bar{l}}{x-\bar{a}} = \frac{(l+\bar{l})x - (a\bar{l} + \bar{a}l)}{x^2 - (a+\bar{a})x + a\bar{a}}$$

Remarque 2.1 (astuces) *Dans la pratique, pour calculer les* l_i*, les* l *et les* m*, on aura recours aux astuces suivantes :*

1. *multiplier le tout par* $(x-a)^n$ *et poser* $x = a$ *pour trouver* l_n
2. *multiplier le tout par* x *et faire tendre* x *vers l'infini pour trouver* l_1 *ou* l

3. *penser à une valeur particulière de x qui rende les calculs aisés (par exemple $x = a+1$ si a est l'une des racines)*

4. *utiliser même une valeur particulière de x complexe, par exemple une racine complexe de x^2+ax+b pour trouver l et m*

Par exemple, soit à décomposer la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{2x^2+x+1}{(x-2)^3} = \frac{l_3}{(x-2)^3} + \frac{l_2}{(x-2)^2} + \frac{l_1}{x-2}$$

La première astuce donne $l_3 = 11$, la seconde $l_1 = 2$, et la troisième $l_2 = 9$ en posant $x = 1$.

Remarque 2.2 (primitives) *Les quotients de la forme $\dfrac{l}{x-a}$ ont pour primitive (sur tout intervalle ne contenant pas a) :*

$$l \ln|x-a|$$

Les quotients de la forme $\dfrac{l}{(x-a)^n}$ pour $n>1$ ont des primitives de la forme :

$$\frac{-l}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$$

Enfin les quotients de la forme $\dfrac{lx+m}{x^2+ax+b}$ peuvent se réécrire sous la forme :

$$\frac{l}{2}\cdot\frac{2x+a}{x^2+ax+b} + \frac{m-\frac{la}{2}}{x^2+ax+b}$$

Le terme de gauche a pour primitive (sur $\mathbb{R}$ tout entier puisque x^2+ax+b n'a pas de racine réelle) :

$$\frac{l}{2}\ln|x^2+ax+b|$$

Et le terme de droite a pour primitive (écrire la forme canonique de x^2+ax+b...) :

$$\frac{m-\frac{la}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}\right)$$

Exercice 2.3 [III.159-169] *Décomposer et calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes :*

$$(a)\ \frac{1}{x^2+a^2},\quad (b)\ \frac{1}{(1+x^2)^2},\quad (c)\ \frac{x^3}{x^2-4},$$

$$(d)\ \frac{4x}{(x-2)^2},\quad (e)\ \frac{1}{x^2+x+1},\quad (f)\ \frac{1}{(x^2+2x-1)^2},$$

$$(g)\ \frac{3x+1}{x^2-2x+10},\quad (h)\ \frac{3x+1}{(x^2-2x+10)^2},\quad (i)\ \frac{1}{x^3+1},$$

$$(j)\ \frac{x^3+2}{(x+1)^2},\quad (k)\ \frac{x+1}{x(x-2)^2},\quad (l)\ \frac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)},$$

$$(m)\ \frac{2x^4+3x^3+10x^2+13x+9}{x^3+x^2+4x+4}.$$

2.3 Primitive d'un développement limité

Théorème 2.5 *Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en a et une primitive F. Alors F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en a.*

Attention, la réciproque est fausse. Une fonction f peut admettre un développement limité à l'ordre n sans que sa dérivée admette un développement limité à l'ordre $n-1$. Par exemple :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x^3 \sin \dfrac{1}{x} \text{ si } x \in \mathbb{R}^\star \end{cases}$$

Cette fonction admet un développement limité à l'ordre 2 en zéro car $f(x) = x^2\epsilon(x)$ avec $\epsilon(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$; elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais f' n'a pas de développement limité à l'odre 1 en zéro (f' n'est pas dérivable en zéro).

Exercice 2.4 *Utiliser le théorème précédent pour calculer des développements limités de* $\ln(1+x)$ *et de* $\mathrm{Arctan} x$ *en zéro, et de* $\mathrm{Arcsin} x$ *en* $1/2$.

3 Applications

3.1 Calcul de l'aire sous un segment de courbe

Théorème 3.1 *Pour une fonction intégrable f à valeurs positives sur un intervalle I, $\int_I f(x)dx$ est égal à l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les deux abscisses bornant l'intervalle I.*

Pour le démontrer, il suffit de remarquer que, *cf.* figure 1.1, les sommes de Darboux inférieures (resp. supérieures) sont les aires de polygones en « escaliers » contenus sous le segment de courbe (resp. contenant le segment de courbe). Ce sont donc des approximations par valeur inférieure (resp. supérieure) à l'aire cherchée.

Remarque 3.1 *Soit $(s_i)_{0 \le i \le n}$ une subdivision de l'intervalle I, on peut étendre le théorème précédent, par la relation de Chasles, au cas d'une fonction f positive sur certains des intervalles $[s_i, s_{i+1}]$ et négative sur les autres, à condition de compter négativement les aires des segments de courbes situés sous l'axe des abscisses.*

3.2 Intégration et dérivation

Théorème 3.2 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction suivante est dérivable sur $[a,b]$:*

$$t \mapsto \int_a^t f(x)dx$$

Sa dérivée est égale à f.

Ainsi toute fonction continue a au moins une primitive.

On peut à présent reformuler et préciser le théorème 2.3 d'intégration par parties :

Théorème 3.3 *Soit F et G deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle $[a,b]$. Alors :*

$$\int_a^b F'(x)G(x)dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F(x)G'(x)dx$$

où la notation entre crochets désigne la quantité suivante :

$$[F(x)G(x)]_a^b = F(b)G(b) - F(a)G(a)$$

Exercice 3.1 *Calculer les intégrales suivantes*

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}, \quad \int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}, \quad \int \ln(1+\sqrt{x})$$

Exercice 3.2 *Calculer l'intégrale*

$$\int \frac{4x^2-3x+7}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

Indication. Soit à intégrer une expression contenant $\sqrt{a^2-x^2}$ sur un intervalle contenu dans $[-a,a]$, penser au changement de variable $x = a\sin t$.

Exercice 3.3 *Calculer l'intégrale*

$$\int \frac{dx}{e^x + 4e^{-x} + 3}$$

Exercice 3.4 (un changement de variable pas évident) [III.69-71] *Trouver une primitive de la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Solution. On applique le changement de variable suivant :

$$x = \frac{2y}{1-y^2}$$

Alors :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{2(1+y^2)}{(1-y^2)^2}$$

Donc (quelques abus de notations, on néglige ici les bornes d'intégration) :

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{2dy}{1-y^2} \\
&= \int \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right) dy \\
&= \ln \frac{1+y}{1-y} + K \\
&= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + K
\end{aligned}$$

Remarquons toutefois qu'on aurait pu retrouver ce résultat en faisant deux changements de variable successifs plus faciles, d'abord $x = \tan\theta$ qui a le bon goût de transformer $\sqrt{1+x^2}$ en $1/\cos\theta$, puis $y = \tan(\theta/2)$, changement de variable usuel quand on intégre un quotient de polynômes trigonométriques.

Exercice 3.5 [III.107] *En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer que :*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + K$$

pour $|x| \geq 1$.

Exercice 3.6 [III.71] *Soit* $k > 1$ *un entier. On va chercher à calculer* $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^{k/2}}$.

1) Montrer que (intégration par partie)

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{k}{2}}} dx = \frac{1}{2-k}\left(\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{k}{2}-1}} - \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{k}{2}-1}}\right)$$

2) Exprimer $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^{k/2}}$ *en fonction de* $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^{k/2}}$ *(écrire* $1 = (1+x^2) - x^2$*).*

3) En déduire une relation de récurrence, et l'appliquer à $k=3$ *et* $k=5$.

Exercice 3.7 (changements de variables) [III.143-151]

$$(a) \quad \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$$

$$(b) \quad \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(c) \quad \int \frac{1}{\sin x} dx \quad (\textit{poser } t = \tan\frac{x}{2})$$

$$(d) \quad \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x} dx$$

$$(e) \quad \int \sin^5(x) dx \quad (\textit{poser } u = \cos x)$$

$$(f) \quad \int \operatorname{ch}^3(x) dx \quad (\textit{poser } u = \operatorname{sh} x)$$

Exercice 3.8 *Soit* f *une fonction continue définie sur* $[-a, a]$. *Montrer que :*

(a) si f *est paire, alors* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

(b) si f *est impaire, alors* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

(c) applications : calculer les intégrales suivantes

$$\int_{-1}^{1} x|x| dx, \quad \int_{-1}^{2} x|x| dx, \quad \int_0^{2\pi} |\cos x| dx$$

Exercice 3.9 *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant leurs domaines de définition :*

$$F_1(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt, \quad F_2(x) = \int_x^1 f(t)dt, \quad F_3(x) = \int_{1/x}^{1/x^2} f(t)dt$$

Exercice 3.10 *(a) Calculer sur $\mathbb{R}-\{1\}$ toutes les primitives de la fraction rationnelle*

$$h(x) = \frac{x+1}{x^3-1}.$$

(b) On note $I = [\pi/4, 5\pi/4]$ et on considère la fonction g définie sur I par

$$g(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin^3(x) - \cos^3(x)}.$$

Justifier l'existence d'une primitive de la fonction g sur I.

(c) Sur quels intervalles contenus dans I le changement de variable $u = \tan x$ est-il défini ? Calculer les primitives de g sur chacun de ces intervalles et en déduire toutes les primitives de g sur l'intervalle I.

Exercice 3.11 [III.157]

1) Soit $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

2) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} n \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2$$

Exercice 3.12 [III.158]

1) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)$$

2) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)(2n+3)...(4n-1)}{2n(2n+2)...(4n-2)}$$

Exercice 3.13 [II.174-178] *Calculer la limite suivante (a est une constante réelle non nulle) :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{an}}{an!}$$

Exercice 3.14 *Montrer que*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 3.15 (fractions rationnelles trigonométriques) *Calculer les intégrales suivantes.*

$$(a) \quad \int_0^{\pi/6} \frac{3+\sin x}{(2+\sin x)\cos x} dx$$

$$(b) \quad \int \frac{\cos x}{2\cos x + \sin x} dx$$

$$(c) \quad \int \frac{2+3\sin x - 2\cos x}{1+\sin x + \cos x} dx$$

$$(d) \quad \int \cos^8(x)\sin^5(x) dx$$

$$(e) \quad \int \sin^4(x)\cos^2(x) dx$$

Exercice 3.16 (intégrale de Wallis) [III.156] *Par récurrence sur n, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale*

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx$$

4 Intégrales généralisées

4.1 Exercices préparatoires

Exercice 4.1 [III.108-110] *Calculer les intégrales (pour $x > 1$) :*

$$F_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{3+2t} \qquad F_2(x) = \int_0^x \frac{dt}{3+2t^2} \qquad F_3(x) = \int_0^x t^2 e^{-t} dt$$

$$F_4(x) = \int_0^x t\sin t . dt \qquad F_5(x) = \int_2^x \frac{dt}{t\ln^2 t} \qquad F_6(x) = \int_1^x \frac{e^{1/t}}{t^2} dt$$

$$F_7(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t\sqrt{t}} dt \qquad F_8(x) = \int_0^x \frac{t\ln(t+1)}{(1+t^2)^2} dt$$

$F_i(x)$ a-t-elle une limite quand x tend vers $+\infty$?

Exercice 4.2 *Soit $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}.$$

Déterminer une fonction F définie

a) sur $]-1, +\infty[$

b) sur $\mathbb{R} - \{-1\}$

telle que $F' = f$ et que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$. F est-elle unique ?

Exercice 4.3 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} (1/x^2)\int_0^x \operatorname{Arctan}(t) dt \ \ si\ x \neq 0 \\ \alpha \ \ si\ x = 0 \end{cases}$$

a) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

b) f est-elle alors dérivable sur $\mathbb{R}$?

c) Que peut-on dire de $f(x)$ si x tend vers $+\infty$?

Exercice 4.4 *Soit $F :]0,1[\cup]1,+\infty[\to\mathbb{R}$ la fonction définie par :*

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

a) F est-elle bien définie ? Continue ? Dérivable ?

b) Calculer $F'(x)$. Calculer $\lim_{x\to 1} F'(x)$.

c) Montrer que $F(x)$ a une limite quand x tend vers 1 et la calculer (on pourra montrer que la fonction $f :]0,1[\cup]1,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{\ln t} - \dfrac{1}{t-1}$ se prolonge par continuité en 1, en déduire que $\lim_{x\to 1} \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2} f(t)dt = 0$ et conclure).

d) Soit $G :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ le prolongement par continuité de F. Montrer que G est dérivable.

4.2 Définitions

Définition 4.1 *Soit $a\in\mathbb{R}$ et $f : [a,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a,x]$ pour tout $x\in[a,+\infty[$. Soit la fonction $F : [a,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

On dit que f est intégrable sur $[a,+\infty[$ si $F(x)$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Dans ce cas on note cette limite

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} F(x),$$

*et on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est l'*intégrale généralisée[2] *de f sur $[a,+\infty[$.*

Définition 4.2 *Soit a et $b\in\mathbb{R}$ et $f :]a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[x,b]$ pour tout $x\in]a,b]$ (non nécessairement bornée). On dit que f est intégrable sur $]a,b]$ si la fonction*

$$F(x) = \int_x^b f(t)dt$$

a une limite finie lorsque x tend vers a. On note alors

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a} F(x),$$

et on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

Définition 4.3 *On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est* absolument convergente *si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.*

[2] On dit parfois, plus simplement, que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est l'*intégrale* de f sur $[a,+\infty[$. Ou bien l'on dit que c'est une *intégrale impropre*. Ou encore, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est *convergente*. Si on emploie cette dernière expression, alors, lorsque F n'admet pas de limite finie quand x tend vers $+\infty$, on dit aussi que cette intégrale est *divergente*.

4.3 Théorèmes de convergence

Lemme 4.1 *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*

(i) Si f est majorée, alors il existe un nombre réel ℓ tel que $\lim_{x\to b} f(x) = \ell$.

(ii) Si f n'est pas majorée, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

On a des résultats analogues pour une fonction f décroissante, et pour les suites croissantes ou décroissantes de nombres réels.

Propriété 4.1 (Intégrales de Bertrand)

$$I_{\alpha,\beta} = \int_2^{+\infty} t^\alpha (\ln t)^\beta dt$$

$I_{\alpha,\beta}$ converge si et seulement si $\alpha < -1$, ou $\alpha = -1$ et $\beta < -1$.

Théorème 4.1 *Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a,b[$. S'il existe ϵ tel que*

$$f(x) = g(x)(1+\epsilon(x)), \qquad \lim_{x\to b} \epsilon(x) = 0,$$

alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature (c'est-à-dire que si l'une converge l'autre aussi, et si l'une diverge l'autre aussi).

Théorème 4.2 *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente, alors elle est aussi convergente, et on a :*

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

4.4 Exercices

Exercice 4.5 [III.72-77] *Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3+1}, \qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+x^{3/2}} dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2} dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{\sqrt{t}} e^{-3t} dt, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^{x-1}-1}}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx$$

Exercice 4.6 [III.77-80] *Déterminer la nature des intégrales suivantes :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1} dx, \qquad \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{1+x^2} dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x - \cos 2x}{x} dx.$$

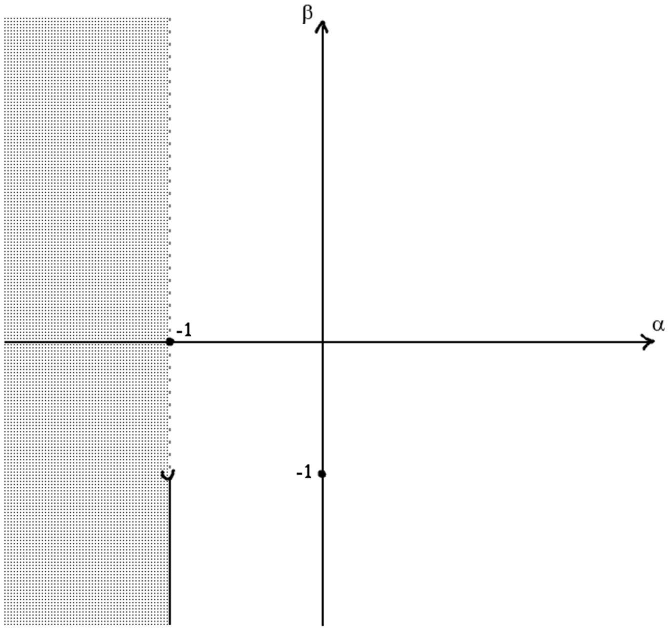
Exercice 4.7 [III.81-84] *Etudier la convergence des intégrales :*

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} (t+1)^\alpha e^{-t} dt, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$J(a,b) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{t+1} - \frac{t+a}{t+b} \right) dt, \qquad a,b \in \mathbb{R}, \quad b > 0$$

$$K(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^a(1+x^b)}, \qquad a,b > 0$$

FIG. 2 : Convergence des Intégrales de Bertrand



Exercice 4.8 [III.85] *Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que l'intégrale suivante converge :*

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1 + a\sin x}{x^2}\,dx.$$

Exercice 4.9 [III.85-90] *On considère les intégrales suivantes (dépendant d'un paramètre $a \in \mathbb{R}$) :*

$$I_a = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^a}\,dt \qquad J_a = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^a}\,dt$$

1) Pour $a > 1$, montrer que les intégrales I_a et J_a sont absolument convergentes.

2) Pour $0 < a \leq 1$, montrer que les intégrales I_a et J_a sont convergentes mais pas absolument convergentes (on pourra utiliser le fait que $|x| \geq x^2$ quand $|x|x \leq 1$).

3) On se propose de montrer que I_a et J_a sont divergentes pour $a \leq 0$. Soit une fonction $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

(i) Soit $A \geq 0$ fixé. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x+A) - f(x)) = 0$$

(ii) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[1, +\infty[$ telle que $\lim(x_n) = +\infty$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} (f(x_n + A) - f(x_n)) = 0$$

(iii) *En considérant les fonctions*

$$I_a(x) = \int_1^x \frac{\cos t}{t^a} dt, \qquad J_a(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t^a} dt,$$

puis en choisissant judicieusement la constante A et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ci-dessus, montrer par l'absurde que I_a et J_a sont divergentes pour $a \leq 0$.

Exercice 4.10 [III.90-91]

a) *On pose, pour $x > 0$,*

$$F(x) = \int_{-x}^x \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt.$$

Calculer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$. Quelle est la nature de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt \text{ ?}$$

b) *De même, on pose pour $x > 0$*

$$G(x) = \int_{1/x}^x \frac{\ln t}{t} dt.$$

Comparer les deux intégrales suivantes :

$$\int_{1/x}^1 \frac{\ln t}{t}, \qquad \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt.$$

Que valent $G(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} G(x)$? Quelle est la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt \text{ ?}$$

Exercice 4.11 [III.91-94, 98-101] *Etudier la nature des intégrales suivantes :*

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^{1/3} - t^{1/3}}{t^\alpha} dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t-1}{\sqrt{t}(t^2+1)\ln t} dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1} dt,$$

$$\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}} \ln t . dt, \quad \int_2^{+\infty} \frac{\sin t}{\ln t} dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{(1-e^{-t})\sin t}{t^a} dt \quad (a > 0),$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t - a}{\sin^2 t} dt \quad (a \in \mathbb{R}), \quad \int_0^{+\infty} (\sqrt{t + \sin t} - \sqrt{t}) dt.$$

5 Intégrale et suites de fonctions

Définition 5.1 (convergence simple) *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions réelles définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que la suite (f_n)* converge simplement *vers la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ si*

$$\forall x \in I, \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

Définition 5.2 (convergence uniforme) *Soit* $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions réelles définies sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$*. On dit que la suite* (f_n) converge uniformément *vers la fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall x \in I, \big(n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\big).$$

Géométriquement, on se représente cela en disant que pour n assez grand, le graphe de f_n est compris entre le graphe de $(f - \epsilon)$ et celui de $(f + \epsilon)$.

Théorème 5.1 *Soit* $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions définies sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$*. Soit* $x \in I$*. Si la suite converge uniformément vers une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *et si, pour* n *assez grand, chaque fonction* f_n *est continue en* x*, alors* f *est continue en* x*.*

Exercice 5.1 *Soit* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f_n(x) = x^n$*, pour* $n \geq 0$*. Montrer que cette suite est simplement convergente, mais pas uniformément. Montrer que sa limite n'est pas continue.*

Exercice 5.2 *Soit* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$*, pour* $n > 0$*. Montrer que cette suite converge uniformément vers* 0*.*

Exercice 5.3 *Soit* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *définie « par morceaux » :*

- *pour* $x \in [0, 1/n]$*,* $f_n(x) = n^2 x$*,*
- *pour* $x \in [1/n, 2/n]$*,* $f_n(x) = 2n - n^2 x$*,*
- *pour* $x \in [2/n, 1]$*,* $f_n(x) = 0$*.*

Montrer que (f_n) *est simplement convergente, mais pas uniformément convergente. Pourtant, on montrera que sa limite est continue.*

Théorème 5.2 *Soit* $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions continues sur un intervalle* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *convergeant uniformément vers une fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Alors* f *est intégrable au sens de Riemann, et on a :*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f_n(x)dx \right)$$

Exercice 5.4 [III.102] *Soit, pour tout entier* n *non nul, la fonction* f_n *de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x}.$$

Etudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ *sur* $[0,1]$*, en déduire la nature de la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *où* $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$*.*

Exercice 5.5 [III.102-103, 104] *Soit* f_n *la fonction de* $[0, \pi/2]$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$f_n(x) = n \cos^n x \sin x$$

a) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* $[0, \pi/2]$ *vers une fonction* f *que l'on déterminera.*

b) On pose $u_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)dx$, *étudier la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *La suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge-t-elle uniformément sur* $[0,\pi/2]$ *?*

Exercice 5.6 [III.103] *Soit la suite de fonctions* $(f_n)_{n\geq 1}$ *où* (f_n) *est la fonction définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} (1/n) \ \text{si } |x| \leq n \\ \dfrac{n}{x^2} \ \text{si } |x| \geq n \end{cases}$$

a) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* f *que l'on déterminera.*

b) Comparer $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt$ *et* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.

Exercice 5.7 [III.105, 106] *Etudier, sur* $[0,1]$, *la convergence de la suite de fonction* (a_n) *dans les deux cas suivants :*

$$a_n(x) = \frac{1}{1+nx}$$
$$a_n(x) = \frac{2x}{1+n^\alpha x^2}$$

(où $\alpha > 0$*). Comparer dans chaque cas les deux valeurs suivantes :*

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} a_n(x)dx \qquad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 a_n(x)dx$$

6 Intégrales dépendant d'un paramètre

[IV.51] Soit f une fonction de deux variables, $f:[a,b]\times\Omega\to\mathbb{R}$, où Ω désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Théorème 6.1 *Supposons* f *continue sur* $[a,b]\times\Omega$. *Alors la fonction* $g:\Omega\to\mathbb{R}$ *définie par* $g(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$ *est continue sur* Ω.

Exercice 6.1 *Sous les hypothèses du théorème précédent, montrer que la fonction* G *définie par* $G(X,y) = \displaystyle\int_a^X f(x,y)dx$ *est continue sur* $[a,b]\times\Omega$

Théorème 6.2 *On suppose en outre que* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *existe et est continue sur* $[a,b]\times\Omega$. *Alors la fonction* g *est dérivable et on a :*

$$g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

Théorème 6.3 *Soit* $f:[a,b]\times[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors on a l'égalité suivante (où toutes les intégrales ont un sens) :*

$$\int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy = \int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,y)dy\right)dx$$

Théorème 6.4 (un cas particulier de la formule de Stokes)

$$\iint\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix} dx\,dy = \vec{i}\int_\alpha^\beta f(b,y)dy - \vec{i}\int_\alpha^\beta f(a,y)dy + \vec{j}\int_a^b f(x,\beta)dx - \vec{j}\int_a^b f(x,\alpha)dx$$

Remarque A condition de définir les notations *adhoc*, ce théorème pourrait s'énoncer ainsi :

$$\iint_{[\alpha,\beta]\times[a,b]} \overrightarrow{\nabla} f \, d\omega = \int_{\partial([\alpha,\beta]\times[a,b])} f \, \overrightarrow{n} \cdot d\omega$$

Démonstration C'est une sorte d'intégration par parties. Par exemple :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{a}^{b} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) dx \right) dy = \int_{\alpha}^{\beta} (f(b,y) - f(a,y)) dy$$