Le Théorème de Bézout dans la *Geometria organica* de MacLaurin (1720)

On voit apparaître au XVII^e siècle un certain nombre de directions théoriques, qui serviront de socle à ce que les mathématiciens de la fin du XVIII^e siècle (Bézout, Lagrange) et du XIX^e siècle désigneront comme « théorie de l'élimination » :

- Des énoncés généraux sur la résolution des systèmes d'équations polynomiales qui relient le nombre de solutions d'un système au nombre des équations et des inconnues (ainsi chez Albert Girard, Descartes, Fermat et Jan Hudde).
- Le lien entre l'élimination et une théorie de la divisibilité des polynômes, accueillant dés lors l'algorithme euclidien de recherche du plus grand commun diviseur. Cet algorithme est utilisé comme « méthode générale d'élimination » d'une inconnue dans un système de deux équations (ainsi chez Jan Hudde et Leibniz).
- Un lien, encore discret, entre les méthodes d'élimination et la géométrie analytique ; l'idée qu'à tout système d'équations correspond un « lieu » est rarement formulée de manière générale[1], mais le domaine en plein essort de la « construction géométrique des équations » a nécessairement recours à des techniques d'élimination.

Précisons ce dernier point. Il nous semble en effet que c'est dans la géométrie analytique du XVII^e siècle qu'il faille chercher l'origine d'un théorème, le « théorème de Bézout », clef de voute de toutes les recherches sur l'élimination algébrique aux XVIII^e et XIX^e siècles. L'extension, par Descartes, du domaine de la géométrie analytique à des courbes de degré élevé s'accompagnait de l'échec d'une classification des problèmes et des courbes par « genre », fondée d'une part sur un principe déjà admis des « anciens », les problèmes étant classés suivant les courbes qu'on emploie pour les construire[2], et d'autre part sur un principe original, les courbes étant classées suivant la « composition » des mouvements des outils qui permettent de les tracer ; cette classification devait de plus se prêter à une traduction algébrique, faisant intervenir le degré des équations (équations à une inconnue pour les « problèmes », équations à deux inconnues pour les courbes). Par exemple, les problèmes se traduisant par des équations de degré 3 ou 4 en l'inconnue cherchée appartiennent à une même classe, pour autant que la résolution des équations de degré 3 ou 4 puisse se faire au moyen de courbes planes de degré 2 (sections coniques, descriptibles au moyen d'un « compas » particulièrement simple). La critique du système cartésien, par Fermat d'abord, dans sa *Dissertatio tripartita*[3], ne sut produire que des contre-exemples particuliers. « Chez Descartes, nous dit Fermat, les problèmes de degrés 8 ou 7 nécessitent des courbes de degrés 5 ou 6, ceux de degrés 10 ou 9 des courbes de

[1] cf. par exemple la phrase elliptique de Descartes dans sa *Géométrie* : « s'il manque deux conditions à la détermination de ce point, le lieu où il se trouve est une superficie ».

[2] cf. [4], t. VI, p. 388.

[3] cf. [8], t. I, p. 118–131. Voir aussi la lettre de Fermat à Digby [9], p. 491–497, et [19] pour une analyse de la *Dissertatio tripartita*.

degré 7 ou 8,..., et ainsi de suite à l'infini ; que ces cartésiens voient comme c'est loin de la simplicité et de la vérité géométrique ». Parmi les contre-exemples proposés par Fermat, le plus simple, mais aussi le plus proche de la vérité, est celui d'une équation de la forme $x^{pq} = a$, dont la résolution se ramène à l'intersection de deux courbes de degrés p et q. Bientôt, en 1688, toujours dans le cadre de la critique du système cartésien, Jacques Bernoulli écrit :

> Je pense qu'il n'est pas difficile de démontrer que des courbes de n'importe quel genre sont aptes à la construction d'équations d'autant de dimensions, qu'en compte le carré du nombre de dimensions, auxquelles montent les équations exprimant la nature de ces courbes.[4]

Chaque racine de l'équation considérée devant être construite au moyen d'un des points d'intersection des deux courbes, il faut donc penser que deux courbes de degré n puissent se couper en n^2 points. Il s'agit d'un cas particulier du « théorème de Bézout ». Bernoulli donne l'exemple de deux cubiques planes, qui se coupent en cinq points réels, correspondant aux cinq racines réelles d'une certaine équation de degré 9.

Dans un brouillon de Newton, datant des années 1666–1671, dans le cadre de ses recherches sur la classification des cubiques d'une part, et sur la géométrie analytique (préparant le *Tractatus de methodis serierum et fluxionum* de 1670–1671) d'autre part, Newton explore cette même direction et formule, pour la première fois à notre connaissance, le théorème dit « de Bézout » pour deux courbes algébriques planes, tout en indiquant le lien naturel entre ce théorème et l'élimination :

> Etant données deux courbes, trouver leurs points d'intersection. C'est plus un principe qu'un problème. Mais plutôt susceptible d'une solution algébrique que d'une solution géométrique, et on le fait en éliminant une des deux inconnues des équations. D'où il apparaîtra qu'il y a autant de points d'intersection que le rectangle des dimensions des courbes. [5]

Dans le cas de deux équations, le théorème de Bézout est souvent attribué à MacLaurin[6], et dans le cas d'un nombre quelconque d'équations, à Bézout, ainsi que sa démonstration. Mais le théorème de Bézout, comme on vient de le dire, était déjà là quand MacLaurin publia en 1720 (avec l'aide de Newton) sa *Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis.* Cet ouvrage fut pourtant crucial dans la compréhension du théorème de Bézout : on y

[4]cf. [1] : « Existimo namque, demonstratu haud difficile esse, quod cujuslibet generis curvae aptae sint ad construendas Aequationes tot dimensionum, quot indigat quadratum numeri dimensionum, ad quas ascendunt Aequationes, curvarum illarum naturam exprimentes ».

[5]cf. [16], t. II, p. 177 : « Datis duabus curvis invenire puncta intersectionis. this is rather a principle than a probleme. But rather propounded of the Algebraicall then geometricall solution and that is done by eliminating one of the two unknown quantitys out of the equations. From whence it will appear that there are so many cut points as the rectangle of the curves dimensions. »

[6]cf. [15], § 6 : « Für den Fall $m = 2$ wurde das Theorem zuerst von C. Maclaurin ausgesprochen ; G. Cramer und Euler versuchten, Beweise für diesen Fall zu geben ».

voit apparaître le décompte des points d'intersection de deux courbes *avec leur multiplicité* dans l'application de ce théorème. Ceci suppose une classification (encore grossière) des singularités des courbes algébriques et un concept (pas encore nommé) de multiplicité d'intersection $I(\mathcal{C},\mathcal{D};P)$ de deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ en un point P, avec, en filigrane, la formule :

$$(*) \quad I(\mathcal{C},\mathcal{D};P) \geq \mu_{\mathcal{C}}(P).\mu_{\mathcal{D}}(P)$$

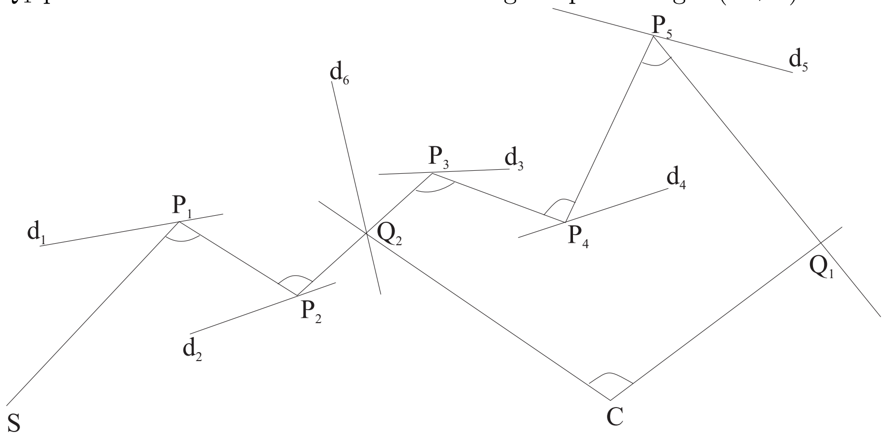
où $\mu_{\mathcal{C}}(P)$ désigne l'ordre de multiplicité du point P sur la courbe $\mathcal{C}$. Le théorème de Bézout s'énonce alors :

$$\sum_{P\in\mathcal{C}\cap\mathcal{D}} I(\mathcal{C},\mathcal{D};P) = \deg(\mathcal{C}).\deg(\mathcal{D})$$

L'objectif de MacLaurin était de classer les courbes algébriques (sur le modèle de l'*Enumeratio* de Newton pour les cubiques) au sein de chaque degré, suivant la position des asymptotes, mais surtout suivant le nombre et la nature des points singuliers, ainsi que de fournir des procédés mécaniques pour tracer une courbe donnée par son degré et par un certain nombre de conditions, un certain nombre de points donnés devant appartenir à la courbe, éventuellement des points singuliers d'ordre de multiplicité donné. Les procédés mécaniques utilisés sont : la rotation d'une droite mobile autour d'un point fixe, la translation d'un point mobile sur une droite fixe, le mouvement d'un point mobile le long d'une courbe fixe de degré quelconque, le mouvement d'une droite mobile autour d'une courbe fixe de degré quelconque (la droite devant rester tangente à la courbe), et des systèmes articulés quelconques de tels points et droites mobiles (en imposant parfois à deux droites mobiles de garder l'une par rapport à l'autre un angle constant). Nous donnerons un exemple détaillé : celui de la proposition XXIII de la première partie de l'ouvrage.

Remarquons d'abord que MacLaurin distingue trois types de points singuliers : le noeud (*nodum*), le point de rebroussement (*cuspis*), et le *punctum conjugatum* (point réel isolé, en lequel deux branches imaginaires de la courbe se rencontrent). Le noeud est un point où se coupent plusieurs branches de la courbe, en nombre quelconque, d'où la notion de point double, triple, etc. (*punctum duplex, triplex*, etc.). MacLaurin est conscient de la complication qui survient lorsque deux des branches d'un tel *punctum multiplex* sont tangentes l'une à l'autre, mais évite en général de considérer ce cas. Il envisage enfin des combinaisons quelconques de ces trois types en un même point.

Soient deux points fixes S et C. Soit un premier système articulé de n droites mobiles (SP_1), (P_1P_2),...,(P_{n-2},P_{n-1}), (P_{n-1},Q_1), la première droite étant en rotation autour du point S, les points P_1,...,P_{n-1} devant parcourir des droites fixes (d_1),...,(d_{n-1}), et les angles $\widehat{SP_1P_2}$,...,$P_{n-2}\widehat{P_{n-1}}Q_1$ restant constants pendant le mouvement. Soit Q_2 l'intersection de la r-ième droite mobile $(P_{r-1}P_r)$ avec une n-ième droite fixe (d_n). Soit un second système articulé (en C) de deux droites mobiles (Q_2C),(CQ_1) dont la première passe par le point Q_2, et la deuxième forme un angle constant $\widehat{Q_2CQ_1}$ avec la première. La position des deux systèmes mobiles, et donc la position du point Q_1 d'intersection des droites $(P_{n-1}Q_1)$,(CQ_1) sont entièrement déterminées par la direction de la droite (SP_1). La proposition XXIII affirme que la courbe $\mathcal{C}$ décrite par le point Q_1 pendant le mouvement est un courbe algébrique de degré $(n+r)$.



Pour le démontrer, MacLaurin cherche en combien de points cette courbe coupe une droite générique (D) du plan[7]. A cet effet, il introduit un autre point mobile Q_3, intersection des droites mobiles (SP_1),(Q_2C). Dans une proposition antérieure (proposition XXI), il a montré que le point Q_3 ainsi défini décrit une courbe $\mathcal{C}'$, de degré $(r+1)$, passant par S et C, avec $\mu_{\mathcal{C}'}(S)=r$ et $\mu_{\mathcal{C}'}(C)=1$. Ensuite, il libère le point Q_2 (autrement dit, il n'impose plus aux droites mobiles $(P_{r-1}P_r)$ et (CQ_2) de concourir avec la droite fixe (d_n)), et impose au point Q_1 de parcourir la droite (D). La même proposition antérieure indique que le point Q_3 décrit alors une courbe $\mathcal{C}''$ de degré $(n+1)$, avec $\mu_{\mathcal{C}''}(S)=n$ et $\mu_{\mathcal{C}''}(C)=1$. Il est alors facile de voir que lorsque Q_3 parvient aux points d'intersection de $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$, Q_1 est à l'intersection de (D) et $\mathcal{C}$, et réciproquement. Il y a cependant une exception, lorsque Q_3 parvient au point S ou au point C, car dans ce cas, la position du point Q_1 n'est pas déterminée de manière unique. Il ne faut donc pas compter les points S et C (*non sunt considerandi*). Or le théorème de Bézout affirme que les deux courbes se coupent en $(n+1)(r+1)$ points, comptés avec multiplicité, dont les points C et S. On a donc :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{card}((D)\cap\mathcal{C})\\
&=\mathrm{card}(\mathcal{C}'\cap\mathcal{C}''-\{S,C\})\\
&=\deg\mathcal{C}'.\deg\mathcal{C}''-I(\mathcal{C}',\mathcal{C}'';S)-I(\mathcal{C}',\mathcal{C}'';C)\\
&=(n+1)(r+1)-nr-1\\
&=n+r
\end{aligned}$$

Donc $\deg\mathcal{C}=n+r$.

Pour justifier de manière moderne cette démonstration, remarquons d'abord que lorsque Q_2 est libre, le mécanisme décrit en fait deux transformations rationnelles du plan (non inversibles) $\phi_1 : Q_3 \mapsto Q_1$ et $\phi_2 : Q_3 \mapsto Q_2$; ϕ_1 n'est définie ni en S ni en C (ce sont des « points singuliers » de la transformation

[7] *ducatur recta quaevis... et investigandum sit quoties curva occurrere potest huic rectae.*

ϕ_1). Alors $\mathcal{C}'' = \overline{\phi_1^{-1}((D))}$ et $\mathcal{C}' = \overline{\phi_2^{-1}((d_n)) \cap \phi_1^{-1}(\mathcal{C})}$. De plus $\phi_{1|\mathcal{C}'} : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ est inversible (c'est-à-dire birationnelle). ϕ_1 « éclate »[8] les points S et C ; ainsi, bien que $C \in \mathcal{C}' \cap \mathcal{C}''$, il ne correspondrait à C un point de $(D) \cap \mathcal{C}$ que si les deux tangentes à $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ en C coïncidaient, ce qui, en général, n'arrive pas. De même pour S. Donc en général, ϕ_1 induit une bijection $\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'' - \{S, C\} \longrightarrow (D) \cap \mathcal{C}$ (en toute rigueur, il faudrait montrer que $\mathcal{C}'$ ne passe pas par d'autres points singuliers de la transformation ϕ_1).

L'exemple de la proposition XXIII nous a permis d'expliquer un argument démonstratif, utilisé systématiquement par MacLaurin dans des démonstrations purement géométriques, pour déterminer le degré d'une courbe algébrique. Il utilise aussi la formule $(*)$ de manière réciproque, pour déterminer l'ordre de multiplicité d'un point singulier (dans le corollaire I de la proposition XXIII, il montre ainsi que $\mu_{\mathcal{C}}(C) = n$). Nous avons vu ci-dessus qu'il utilisait cette formule, non pas avec le signe $\geq$, mais avec le signe $=$. Il sait cependant que lorsqu'une branche de la première courbe est tangente à une branche de la seconde au point d'intersection, la multiplicité d'intersection augmente[9]. Pour obtenir une formule exacte, et dotée d'une interprétation géométrique, de la multiplicité d'intersection de deux courbes planes, il faudra attendre la notion de « points infiniment voisins » introduite par Max Noether à la fin du XIX$^{\text{e}}$:

$$I(\mathcal{C}, \mathcal{D}; P) = \sum \mu_{\mathcal{C}}(P_i).\mu_{\mathcal{D}}(P_i)$$

où la somme s'étend à tous les points P_i « infiniment voisins » du point P sur les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

Ajoutons que la *Geometria organica* contient aussi des démonstrations par l'analyse (au moyen de coordonnées cartésiennes). Mais MacLaurin semble accorder un rôle différent à ces deux types de démonstrations. Il donne ainsi, pour certaines propositions, deux démonstrations distinctes[10] : une géométrique (il utilise alors le théorème de Bézout, comme ci-dessus), et une analytique (en calculant explicitement l'équation de la courbe décrite, et sans avoir recours au théorème de Bézout).

Nous l'avons dit ci-dessus, l'un des objectifs de MacLaurin était de fournir des procédés pour décrire, par le mouvement, des courbes de degré donné passant par des points donnés. C'est ainsi qu'il fut conduit à se poser la question du nombre de points qui déterminent de manière unique une courbe de degré donné. Et c'est ainsi qu'il se heurta au « paradoxe de Cramer ». Soit une courbe d'équation $P(x, y) = 0$. Imposer à cette courbe de passer par le point

[8] Sur la notion d'« éclatement » ou *blowing up*, cf. [10], I.4, p. 28–30.

[9] Ainsi dans la proposition XXVI de la première partie : *nisi forte Lineae se mutuo contingant..., quo in casu duae intersectiones abeunt in unum punctum contactus, et altera earum intersectio erit necessario aliqua earum quas non supposuimus esse in punctis C, S.*

[10] C'est le cas de la proposition XXIII dont nous avons seulement rapporté ci-dessus la démonstration géométrique. D'autre part, la proposition XXI de la première partie, qui, nous l'avons vu, est utilisée dans la démonstration géométrique de la proposition XXIII, est démontrée seulement par l'analyse.

(x_0, y_0) revient à écrire l'équation $P(x_0, y_0) = 0$, linéaire en les coefficients du polynôme P, qui sont au nombre de $N = \frac{n(n+3)}{2}$ si $n = \deg P$. En demandant qu'une telle courbe passe par N points distincts donnés, on obtient donc un système de N équations linéaires entre ces N coefficients. Or un système de N équations linéaires à N inconnues a *en général* une solution unique. Ce principe était communément admis au XVII^e^ siècle[11]. D'autre part, le théorème de Bézout affirme que deux courbes de degré n se coupent en n^2 points. Ces deux assertions semblent se contredire pour $n = 3$. En effet $N = n^2 = 9$, la première assertion dit que 9 points suffisent à déterminer une cubique de manière unique, et la deuxième assertion soutient au contraire que *deux* cubiques se coupent en 9 points. Pour $n > 3$, la situation empire, car $\frac{n(n+3)}{2} < n^2$.

C'est Cramer qui utilisera, en 1750, le terme de « paradoxe » pour désigner ce phénomène. Pourtant, il en expliquera lui-même la cause : les formules (dites aujourd'hui « formules de Cramer ») exprimant la solution d'un système d'équation linéaire par des déterminants peuvent prendre la forme « indéterminée » $\frac{0}{0}$. Mais cela n'enlève rien au caractère paradoxal du résultat ; en effet « ce qui est fâcheux, écrit-il, c'est qu'on ne le puisse voir intuitivement que par un calcul immense »[12]. La théorie de l'élimination dans les systèmes d'équations linéaires n'avait donc pas encore atteint la perfection désirable. Euler, sollicité par Cramer[13], explique le « paradoxe » par l'existence de relations de dépendance linéaire entre les N équations. Il a même l'idée de compter le nombre de ces relations. Il écrit en 1747 un mémoire entier *Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes* (qui parut en 1748 dans le même volume des mémoires de l'Académie de Berlin que son premier mémoire sur la théorie de l'élimination). Ce mémoire se conclut ainsi :

> Quand deux lignes du 4^e^ ordre s'entrecoupent en 16 points, puisque 14 points, lorsqu'ils conduisent à des équations toutes différentes entre elles, sont suffisants pour déterminer une ligne de cet ordre, ces 16 points seront toujours tels que trois ou plusieurs des équations qui en résultent sont déjà comprises dans les autres. De sorte que ces 16 points ne déterminent plus que s'il n'y en avait que 13 ou 12 ou encore moins et partant pour déterminer la courbe entièrement on pourra encore à ces 16 points ajouter un ou deux points. La même chose arrivera, si deux lignes du 5^e^ ordre se coupent l'une l'autre en 25 points, qui n'étant pas suffisants à déterminer la courbe, ils ne vaudront plus que 19, ou même 18, de sorte que 6 ou 7 points sont superflus, et partant ces 25 points seront toujours tellement disposés

[11] Comme nous l'avons dit, l'on rencontre au XVII^e^ siècle des énoncés généraux sur les systèmes d'équations polynomiales, qui relient le nombre de solutions d'un système au nombre des équations et des inconnues, sans toutefois donner de critère rigoureux permettant de repérer les cas particuliers. Citons par exemple Descartes ([4], t. VI, p. 372) : « Et on doit trouver autant de telles Equations qu'on a supposé de lignes qui estoient inconnuës... Après cela,... il se faut servir par ordre de chascune des Equations..., pour expliquer chascune de ces lignes inconnuës, et faire ainsi, en les demeslant, qu'il n'en demeure qu'une seule... ».

[12] cf. [7], I–26, p. XII.

[13] Seul un résumé de la correspondance Euler-Cramer sur le paradoxe de Cramer est publié à ce jour : [7], série IVA, tome 1, lettres 461 (30 sept. 1744) à 467 (13 août 1746).

> que dès que la courbe passera par 19 de ces points, elle passera d'elle même aussi par les autres, ou il sera impossible qu'elle passe par 19 points, sans passer en même temps par tous les 25.[14]

On dirait aujourd'hui qu'un système linéaire de $N+k$ équations à N inconnues (pour $k \geq 0$), qui a au moins deux solutions distinctes, est de rang $r \leq N-1$, et dans ce cas, les équations vérifient certaines relations entre elles (elles ne sont pas « linéairement indépendantes »). Ces relations de dépendance linéaire forment à leur tour un espace vectoriel, de dimension $N+k-r$. Quant au nombre d'équations qu'il faudrait ajouter pour rendre le système déterminé (c'est-à-dire ayant une solution unique), il est égal à $N-r$. Pour deux courbes de degré $n \geq 3$, on a $N+k=n^2$ et $N=\frac{n(n+3)}{2}$. Alors $r \leq \frac{n(n+3)}{2}-1$, et $N+k-r \geq n^2-\left[\frac{n(n+3)}{2}-1\right]=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Pour $n=5$, on a donc $N+k-r \geq 6$, « de sorte que 6 ou 7 points sont superflus », comme le dit Euler. Bien-sûr les notions de rang et d'indépendance linéaire ne sont pas encore formalisées à l'époque d'Euler. Ces compréhensions encore frêles des phénomènes de l'algèbre linéaire ne sont cependant pas isolées : Bézout, dans son traité de 1779, justement pour démontrer le théorème qui porte son nom, fait constamment usage d'une formule sur les systèmes d'équations linéaires homogènes linéairement indépendantes, que l'on pourrait écrire aujourd'hui :

nombre d'équations = nombre d'inconnues − « nombre de coefficients inutiles »

où le dernier terme désigne en fait le nombre de paramètres de la solution générale du système d'équations, c'est-à-dire la dimension de l'espace vectoriel des solutions[15].

C'est encore à la recherche des conditions que l'on peut imposer à une courbe à tracer, de degré donné, que MacLaurin pose la question du nombre maximal de singularités d'une telle courbe. Comme le « paradoxe de Cramer », les résultats auxquels il parvient dans ce domaine feront l'objet de nombreuses recherches au XIX^e^ siècle. Remarquons d'abord que certains des procédés mécaniques envisagés par MacLaurin offrent un paramètrage rationnel de la courbe construite. Ainsi dans le cas de la proposition XXIII, la courbe $\mathcal{C}$ peut être paramétrée par le coefficient directeur de la première droite mobile (SP_1). Mais ce n'est pas le cas de tous les procédés envisagés : certains d'entre eux tracent des cubiques sans point double, courbes de genre 1, pour lesquelles n'existe aucun paramétrage rationnel. Le mécanisme envisagé est, par conséquent, d'une nature différente. MacLaurin était conscient de l'influence du nombre de singularités sur la nature du mécanisme, comme l'indique la division en sections de la première partie de son ouvrage, la section II portant sur les cubiques avec point double, et la section III sur les cubiques sans point double et les quartiques. Pourtant, il parvient rarement à une étude exhaustive des singularités de la courbe construite.

[14] cf. [6], § 23.

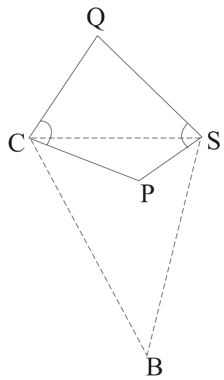
[15] Frobenius n'introduira le mot *rang* qu'à la fin des années 1870, pour désigner le plus haut rang des mineurs non nuls d'une matrice (*der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten*), mais l'invariance d'un tel nombre (pour la multiplication par des matrices inversibles) est démontrée par Sylvester en 1850.

La raison en est simple : il n'avait pas les moyens de déterminer l'ensemble des singularités d'une courbe donnée (ce qu'eût rendu possible la connaissance du discriminant de la courbe). Il se contentait donc d'étudier le comportement de la courbe au voisinage de certains points (dont les points fixes du mécanisme utilisé pour tracer). Ainsi, dans la proposition XXIII, il montre que $\mu_{\mathcal{C}}(C) = n$, mais ne remarque pas l'existence d'autres points singuliers[16]. Dans ce contexte, la connaissance du nombre maximal de singularités d'une courbe de degré donné constitue un progrès important. On sait aujourd'hui qu'une courbe algébrique plane possède un paramètrage rationnel si et seulement si elle a le nombre maximal de points singuliers que puisse avoir une courbe de son degré. MacLaurin savait qu'une courbe de degré $2n$, ayant trois singularités d'ordre n et une quatrième d'ordre $(n-1)$, ne peut en avoir d'autre[17]. Une telle courbe est donc susceptible d'un paramètrage rationnel. Et MacLaurin montre en effet, dans la dernière proposition de l'ouvrage (proposition XXVII de la seconde partie) comment tracer une telle courbe, lorsque ses 4 points singuliers sont donnés, ainsi que 2n points simples ; la méthode utilisée, que MacLaurin a tenté de généraliser sans succès (il le dit lui-même), donne un paramètrage rationnel, et est particulièrement simple. Elle utilise plusieurs fois, successivement, un mécanisme[18] constitué de deux points fixes S et C, autour desquels pivotent respectivement deux angles (de mesures constantes) $\widehat{PSQ}$ et $\widehat{PCQ}$. Soit B la position que prend le point P lorsque $Q \in (CS)$. Lorsque l'on fait parcourir au point Q d'intersection des droites mobiles (SQ) et (CQ) une courbe $\mathcal{C}$ de degré n, le point P trace en général une courbe de degré $2n$, ayant trois singularités d'ordre n, aux points S,C,B. Mais si $\mathcal{C}$ a une singularité d'ordre $(n-1)$ en C, alors la courbe tracée par P dégénère en une courbe de degré $(n+1)$ ayant une singularité d'ordre n en C, et S et B pour points simples.

[16] Ce qui le conduit à affirmer, dans les corollaires IV et VI de la proposition XXIII, qu'une variante du mécanisme décrit ci-dessus permet de tracer une quartique ayant un point double en C, qui, dans un cas particulier, dégénère en une cubique sans point double. En fait, la quartique possède trois points doubles (puisqu'elle est rationnelle), et dégénère en une cubique avec point double. Il y a une erreur semblable dans la proposition XVII (de la première partie). Ces erreurs ont été commentées par C. Tweedie [20]. Ajoutons qu'elles figuraient déjà dans le premier article de MacLaurin sur ce sujet, en 1719 (cf. [11], figures 6 et 9).

[17] cf. [12], partie II, section V, lemme III, corollaire V.

[18] Le mécanisme est décrit dans la partie II, section I, proposition III et ses corollaires I et IV.



On peut interpréter ce mécanisme comme une transformation birationnelle quadratique du plan $\phi_{S,C,B} : Q \mapsto P$, d'inverse $\psi_{S,C,B}$. La méthode de MacLaurin consiste alors à transformer la courbe de degré 2n donnée (déterminée de manière unique par ses 4 singularités et ses 2n points simples donnés) par des applications successives $\psi_{S,C,B}$ pour des points S,C,B bien choisis, d'abord en une courbe de degré n ayant seulement une singularité d'ordre $(n-1)$, puis en une courbe de degré $(n-1)$ ayant une singularité d'ordre $(n-2)$, etc., jusqu'à obtenir une droite[19]. Cette construction donne un paramétrage rationnel de $\mathcal{C}$, au moyen d'une succession de transformations quadratiques « éclatant » les points singuliers.

Finalement, MacLaurin est le premier, à notre connaissance, à avoir montré qu'une courbe $\mathcal{C}_n$ de degré n a au plus $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles[20] : supposons avec lui qu'il y en ait $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$, il existerait alors une courbe $\mathcal{C}_{n-2}$ de degré $(n-2)$ qui passe par tous ces points doubles et par $(n-3)$ points simples choisis arbitrairement sur $\mathcal{C}_n$ (car l'équation générale de degré $(n-2)$ a $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 + (n-3) = \frac{(n-2)(n+1)}{2}$ coefficients indéterminés). On compterait alors $n-3+2\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1\right) = n(n-2)+1$ points d'intersection, alors que le théorème de Bézout en prédit au maximum $n(n-2)$.

On sait aujourd'hui que l'on peut classer les courbes algébriques planes selon le genre g, un entier positif dépendant du degré n de la courbe et du nombre de ses points doubles, les singularités d'ordre k comptant chacune, en général, pour $\frac{k(k-1)}{2}$ points doubles[21] :

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \text{nombre de points doubles}$$

Si l'on voulait à présent se conformer à l'historiographie déjà existante sur l'élimination et le théorème de Bézout, il nous faudrait quitter MacLaurin pour

[19] cf. [12], partie II, section V, prop. XXV et XXVII, p. 137–139.
[20] cf. [12], p. 137.
[21] cf. par exemple [10], IV, exercice 1.8 «p_a of a Singular Curve ».

aborder les contributions de Cramer, Euler, puis Bézout. Ces auteurs ont donné plusieurs démonstrations et généralisations du « théorème de Bézout » que nous avons rencontré dans la *Geometria organica*. MacLaurin n'y donne en effet aucune démonstration générale du théorème. Il se contente de le démontrer dans le cas où l'une des deux courbes est de degré 2 ou 3, et ceci en calculant explicitement l'équation finale résultant de l'élimination d'une des deux inconnues. Il avoue son échec dans le cas général[22]. Euler tentera de préciser les conditions de possibilité de l'interprétation géométrique du théorème de Bézout, en étudiant sur des exemples le rapport entre élimination algébrique et intersection de courbes (dans le plan) ou de surfaces (dans l'espace), et en insistant sur le besoin de compter, parmi les points d'intersection, des « points imaginaires ». Il exposera en particulier le phénomène des lignes de contact entre deux surfaces, et des points de contact, qui ne sont que des points réels de courbes d'intersection imaginaires de deux surfaces. Mais de Newton à Bézout, le théorème de Bézout garde la marque de son origine algébrique. Les questions que se posent ces auteurs sont celle du degré de l'équation finale résultant de l'élimination, et celle de la méthode d'élimination à employer. MacLaurin, utilisant ce théorème comme *principe* dans des démonstrations de nature purement géométrique, semble donc faire figure d'exception. Suivons encore un peu la trajectoire du théorème de Bézout en géométrie.

A la *Geometria organica* succédèrent d'autres recherches de MacLaurin sur la description des courbes. MacLaurin fut stimulé dans ces travaux par un théorème dû à Pappus, que lui communiqua en 1722 son collègue Robert Simson (1687–1768) qui tentait alors de restituer le « Traité des porismes » perdu d'Euclide. Voici le théorème dû à Pappus :

> Si trois points situés sur une seule droite d'une figure convexe ou non convexe sont donnés, et si les points restants, à l'exception d'un seul, sont liés à des droites données de position, ce seul point est aussi lié à une droite donnée de position.[23]

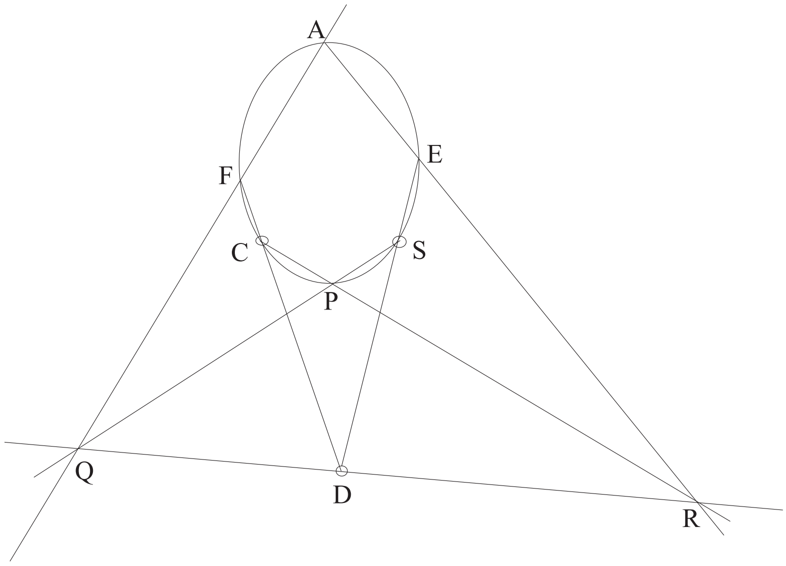
MacLaurin exprime ce théorème sous une forme plus générale (voir figure suivante) :

> Supposez que les trois pôles soient C, S et D, et que des lignes droites CR, SQ, QDR pivotent autour de ces pôles. La ligne qui pivote autour de D ne sert qu'à guider le mouvement des deux autres, de telle sorte que son intersection avec chacune d'elles parcourant un droite fixe, leur intersection mutuelle décrit un lieu, que l'on démontre être une section conique... L'on montre ensuite, que si C, S et D sont situés sur une même ligne droite, le point P décrit une

[22] cf. [12], partie II, section V, lemme III, corollaire I : « Omnes altiorum curvarum casus quos adhuc tentavimus idem probant ; universalem vero hujus rei demonstrationem adhuc frustra quaesivimus propterea quod difficile sit divisores in arduis aequationibus invenire ». Quant au problème des « diviseurs » (*divisores*), peut-être MacLaurin fait-il allusion aux facteurs superflus que l'élimination introduit dans l'équation finale. C'est ce même problème qui retiendra longtemps Euler et Bézout dans des essais infructueux (cf. par exemple [2]).

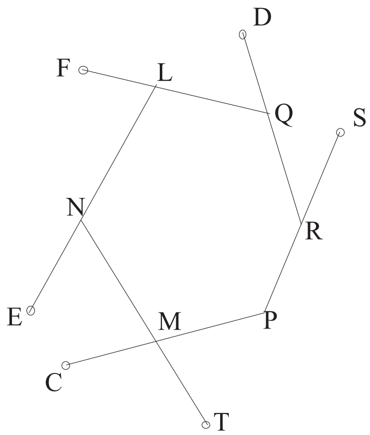
[23] cf. [17], t. 2, p. 488.

ligne droite...[24]



On reconnaît dans cette figure le théorème de Pascal sur l'hexagramme inscrit dans une section conique. Au triangle PQR dont les côtés pivotent sur les pôles C,S,D, MacLaurin substitue ensuite un polygône d'un nombre quelconque de côtés, soit six pour fixer les idées (voir figure suivante), pivotant autour des pôles C,D,E,F,S,T, et énonce le théorème général suivant :

> Supposez que L, Q, R, M, N parcourent des courbes de degrés respectifs m, n, r, s, t, alors le lieu de P est une courbe de degré au plus $2mnrst$.[25]



MacLaurin avait déjà, dans la *Geometria organica*, décrit des procédés pour tracer des courbes dont le degré dépende du produit des degrés d'un nombre

[24]cf. [13], p. 151–153, ainsi que la figure 6.
[25]cf. [13], p. 156.

quelconque de courbes données. Mais le théorème que l'on vient d'énoncer, par sa simplicité, sa parenté avec le théorème de Pappus, et son caractère projectif (contrairement aux procédés utilisant la rotation d'angles constants de la *Geometria organica*) était promis à un avenir meilleur. Ce théorème, parmi d'autres, fit l'objet d'une querelle de priorité entre MacLaurin et W. Braikenridge (1700–1762). Ce dernier publia en 1733, dans un ouvrage intitulé *Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum*, de nombreux théorèmes sur le tracer des courbes, démontrés par le théorème de Bézout et la méthode géométrique qu'employaient MacLaurin dès 1721 comme nous l'avons vu. Sans entrer dans les détails de cette controverse[26], indiquons simplement qu'à cette occasion, Braikenridge annonça qu'il connaissait une démonstration du théorème de Bézout, conçue par son collègue George Campbell (?–1766), mais pas encore rendue publique, à cause de la trop grande modestie de son auteur[27]. Dans sa riposte, publiée en 1735, MacLaurin affirma aussi avoir une démonstration, « générale », du théorème de Bézout (cf. [13], p. 148), et même l'avoir déjà « imprimée » en 1722, dans un « supplément » à sa *Geometria organica*, supplément qu'il n'aurait cependant jamais publié, « ayant été engagé dans des travaux d'une nature différente, et dans des recherches sur d'autres sujets depuis lors » (p. 144). Il est d'ailleurs intéressant que dans ce texte de 1735, MacLaurin s'excuse de retarder encore la publication de son supplément, et s'en justifie par un goût pour les démonstrations géométriques, plus longues à produire que les démonstrations analytiques :

> As to the Demonstrations, it would take some time to put them in a proper Form to be published. You who have so nice a Taste of Demonstrations, will easily allow, that it ought not to be done in a hurry. I could send those that are Algebraick easily ; but do not care to send those that are Geometrical, till I have leisure.[28]

Nous n'avons pas trouvé d'autre trace des démonstrations de Campbell et de MacLaurin. Ajoutons toutefois que, peu avant la controverse avec Braikenridge, Campbell lui-même avait été engagé dans une querelle de priorité avec MacLaurin, au sujet de la « règle de Newton » sur le nombre de racines réelles d'une équation. Les deux mathématiciens montrèrent chacun à cette occasion un talent en algèbre qu'aurait pu illustrer une démonstration du théorème de Bézout[29].

---

[26]Sur cette controverse, cf. l'article [14] de S. Mills, qui conclut que MacLaurin ne se sentait pas concerné par une question de priorité (Braikenridge ayant de toute façon *publié* le premier), mais se défendait plutôt contre une accusation injuste d'ignorance : « Here then is the reason for MacLaurin's having taken issue with Braikenridge : not that of priority as such, but the insult that Braikenridge implied that MacLaurin did not know of the theorems, when in fact he had been teaching them since 1725 ».

[27]cf. [3], préface : « *Cl. Geometra D. Georgius Campbel* inter plurima alia eximia inventa, quae ob summam ejus modestiam apud eum latent, hujus theorematis praeclaram habet demonstrationem, in lucem brevi ut spero prodituram ». Sur la personne de George Campbell, cf. [21].

[28]cf. [13], p. 147.

[29]Il y a toutefois un témoignage de R. Simson, qui n'en dit pas beaucoup plus que ce que nous savons : « Just now I was looking some Theorems yow wrote down in the first pages of

Quant au théorème ci-dessus sur les polygones, il survécut à cette controverse et devint le coeur du dernier chapitre du *Traité des propriétés projectives des figures* de Poncelet, en 1822 (section IV, chapitre III). Poncelet utilise systématiquement, dans cette section, le théorème de Bézout et la méthode géométrique de MacLaurin pour déterminer le degré de courbes tracées mécaniquement. Il fait profession de n'avoir plus recours à l'usage des coordonnées. Il doit aussi fournir une démonstration nouvelle, géométrique, du théorème de Bézout. Tout d'abord, son « principe de continuité » lui permet de définir le degré d'une courbe algébrique comme étant le nombre d'intersections de cette courbe avec une droite quelconque du plan (et non plus, comme chez MacLaurin, avec ce que nous voudrions aujourd'hui désigner par l'expression de droite *générique*) :

> Il est essentiel de remarquer qu'en vertu du principe de continuité, une droite, tracée arbitrairement dans le plan d'une courbe d'un certain degré, doit toujours être censée rencontrer cette courbe en un nombre de points *réels*, *imaginaires*, *multiples* ou *situés à l'infini*, égal au nombre qui exprime le degré de cette courbe...[30]

Voici donc la démonstration du théorème de Bézout, pour deux courbes planes de degré 2 (elle se généralise immédiatement à des courbes de degrés quelconques) :

> Si l'on suppose que l'une des deux courbes change de forme, par succession insensible, de façon qu'en conservant toujours le même degré ou la même nature, elle tende sans cesse à dégénérer en deux lignes droites ; par suite de la loi de continuité, elle devra aussi sans cesse conserver le même nombre de points d'intersection réels, imaginaires, etc., avec l'autre ; or il est évident que, à la limite, ce nombre ne saurait surpasser quatre, d'après la définition même adoptée pour les lignes du second ordre ; donc pareillement les courbes proposées ne peuvent avoir plus de quatre points communs, et, si elles en ont réellement cinq, elles se confondent nécessairement en une seule et même courbe.[31]

Au § 542, Poncelet dresse un bilan des conséquences du théorème de Bézout et du théorème de MacLaurin sur les polygones : ils conduisent « immédiatement à la propriété de l'hexagramme mystique de Pascal, et par suite à toute la théorie des pôles et polaires des sections coniques, théorie d'où dérive aussi l'élégant théorème de M. Brianchon sur l'hexagone circonscrit... », et permettent d'établir « sur-le-champ toute la théorie des centres et axes d'homologie des sections coniques »[32]. Des pans entiers de la géométrie projective trouvent ainsi

a book of mine that is dated in that year [1720], which yow told me were Lemmas to that proposition concerning the Number of points 2 curves can intersect one Another... », lettre de R. Simson à MacLaurin, 27 juillet 1736, cité par [14].

[30] cf. [18], t. 1, § 539.

[31] cf. [18], t. I, § 598. Dieudonné a indiqué comment rendre cette démonstration rigoureuse dans [5], § VII,20.

[32] Ailleurs, Poncelet ajoute que le théorème de Bézout « pourrait encore servir immédiatement à prouver que toutes les lignes du second ordre sont nécessairement des sections co-

un fondement unique. Poncelet en tire un argument de poids en faveur de son « principe de continuité » :

> Telle est donc l'influence que peut exercer l'admission de la loi de continuité dans les recherches géométriques, influence qui peut très bien être comparée, ce me semble, à celle qu'y exerce elle-même l'Analyse algébrique, par sa grande généralité.

Enfin, Poncelet propose plusieurs généralisations du théorème de MacLaurin sur les polygônes, ainsi en remplaçant les pôles par des courbes fixes autour desquelles doivent rouler les droites mobiles (en restant tangentes à ces courbes). Dans le cas où toutes les courbes que parcourent les sommets d'une part, et toutes les courbes sur lesquelles roulent les droites mobiles d'autre part, sont confondues, il obtient un théorème sur les polygones simultanément inscrits et circonscrits à deux sections coniques :

> Quand un polygône quelconque est à la fois inscrit à une section conique et circonscrit à une autre, il en existe une infinité de semblables qui jouissent de la même propriété à l'égard des deux courbes ; ou plutôt tous ceux qu'on essaierait de décrire, à volonté, d'après ces conditions, se fermeraient d'eux-mêmes sur ces courbes. Et réciproquement, s'il arrive qu'en essayant d'inscrire à volonté, à une section conique, un polygône dont les côtés en touchent une autre, ce polygône ne se ferme pas de lui-même, il ne saurait nécessairement y en avoir d'autres qui jouissent de cette propriété.[33]

Références

[1] Jacques Bernoulli. « Animadversio in geometriam cartesianam, et constructio quorundam problematum hypersolidorum ». *Acta Eruditorum*, pages 323–330, juin 1688.

[2] Etienne Bézout. « Sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues ». *Hist. Acad. Sci.*, pages 288–338, 1764.

[3] W. Braikenridge. *« Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum »*. Ric. Hett & Joh. Nourse, Londres, 1733.

[4] René Descartes. *Oeuvres de Descartes publiées par Charles Adam et Paul Tannery.* Vrin, Paris, 1986.

[5] Jean Dieudonné. *Cours de géométrie algébrique*, vol. I, *Aperçu historique sur le développement de la géométrie algébrique.* Presses Universitaires de France, Paris, 1974.

[6] Leonhard Euler. « Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes ». *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, 4* : 219–233, 1748. (cf. [7], série 1, vol. XXVI, p. 33–45).

niques ».

[33] cf. [18], t. 1, § 566.

[7] Leonhard Euler. *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, éd., F. Rudio, A. Krazer, P. Stackel. Série 1, 29 vol. ; série 2, 31 vol. ; série 3, 12 vol. ; série 4A, correspondance, 7 vol. B. G. Teubner, Leipzig Berlin Zurich Basel, 1911.

[8] Pierre Fermat. *Oeuvres de Fermat*, éd. P. Tannery et Ch. Henry. Gauthier-Villars, Paris, 1891.

[9] Pierre Fermat. *Oeuvres de Pierre de Fermat. I. La théorie des nombres.* éd. R. Rashed, C. Houzel, G. Christol. Albert Blanchard, Paris, 1999.

[10] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer, New York, 1977.

[11] Colin MacLaurin. « Nova methodus universalis curvas omnes cujuscunque ordinis mechanicae describendi sola datorum angulorum et rectarum ope ». *Philosophical transactions*, *30* : 939–945, 1717–1719.

[12] Colin MacLaurin. *Geometria organica : sive descriptio linearum curvarum universalis.* Gul. et Joh. Innys, London, 1720.

[13] Colin MacLaurin. « The description of curve lines ». *Philosophical transactions*, *39* : 143–165, 1735–1736.

[14] Stella Mills. « Note on the Braikenridge-MacLaurin theorem ». *Notes Rec. Roy. Soc. Lond.*, *38* : 235–240, 1984.

[15] Eugen Netto. « Rationale Funktionen mehrerer Veranderlichen ». *Enzykl. der Math. Wiss.*, vol. I B 1 *b* : 255–282, 1894.

[16] Isaac Newton. *The Mathematical Paper of Isaac Newton*, éd., D. T. Whiteside. Cambridge University Press, Cambridge, 1972.

[17] Pappus d'Alexandrie. *La collection mathématique*, trad. Paul Ver Eecke, 2 tomes. A. Blanchard, Paris, 1982.

[18] Jean-Victor Poncelet. *Traité des propriétés projectives des figures*, 2^e éd. Gauthier-Villars, Paris, 1865.

[19] Roshdi Rashed. « Fermat and Algebraic Geometry ». *Historia Scientiarum*, *11*(1) : 24–47, 2001.

[20] Charles Tweedie. « The Geometria organica of Colin Maclaurin ». *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, *36* : 87–150, 1916.

[21] Dennis Weeks. « The life and mathematics of George Campbell, F. R. S. ». *Historia Mathematica*, *18* : 328–343, 1991.