Dérivées partielles et opérateurs différentiels

Erwan Penchèvre

SUPII 2009

1 Calcul différentiel

1.1 Domaine de définition d'une fonction

On va s'intéresser à des fonctions de deux ou trois variables x, y, z. Géométriquement, ces variables désignent les coordonnées d'un point du plan ou de l'espace dans un repère cartésien. Une telle fonction associe à chaque point de son domaine de définition un scalaire (c'est-à-dire un nombre réel) :

$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) \in \mathbb{R}$$

On s'intéressera parfois à des fonctions qui ne sont pas définies en tout point. De même qu'on est habitué, pour les fonctions d'une seule variable, à étudier des fonctions définies seulement sur un intervalle (et non sur $\mathbb{R}$ tout entier), on s'intéressera ici à des fonctions définies sur un certain « ouvert » du plan ou de l'espace. Intuitivement, on appelle « ouvert » tout portion du plan ou de l'espace délimitée par un bord, **bord exclu**. Par exemple, l'ensemble des points du plan compris à l'intérieur d'un cercle (mais pas sur le cercle lui-même) constitue un disque « ouvert » ; de même, l'ensemble des points de l'espace compris à l'intérieur d'une sphère (mais pas sur la sphère elle-même) constitue une boule « ouverte ».

Attention : on verra certains théorèmes qui ne s'appliquent qu'à des fonctions définies sur des domaines vérifiant certaines conditions (théorème de Poincaré). Mais une définition plus rigoureuse de la notion d'ensemble « ouvert » dépasse le cadre de ce cours (cf. topologie).

1.2 Interprétation géométrique, continuité

Géométriquement, une fonction de deux variables peut être représentée par une surface d'équation $z = f(x, y)$ dans l'espace : au-dessus de chaque point (x, y) du plan contenant les axes Ox et Oy, on situe un point de coordonnées $(x, y, f(x, y))$. L'ensemble de ces points constitue une surface, au moins aux endroits où f est « continue » et ne commet pas de saut brusque.

De manière plus rigoureuse, f est continue en (a, b) si et seulement si

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\forall x, y \in \mathbb{R})\ (\exists \eta > 0)\ \ \|(x - a, y - b)\| < \eta \ \Rightarrow\ |f(x, y) - f(a, b)| < \epsilon$$

Par exemple, chaque figure dans ce polycopié est la surface représentative d'une fonction de deux variables. Les fonctions des fig. 1 p. 3 et 2 p. 4 sont des fonctions continues, mais 3 p. 5 est discontinue en $(0, 0)$.

D'autre part, on peut aussi utiliser une fonction de deux variables pour définir « implicitement » une courbe du plan, d'équation $f(x, y) = 0$. C'est l'ensemble des points (x, y) dont les coordonnées vérifient cette équation. De même, une fonction de trois variables définit une surface dans l'espace, d'équation $f(x, y, z) = 0$.

Plus généralement, une fonction de trois variables x, y, z est une grandeur qui dépend de la position dans l'espace (par exemple la température). On appelle cela un « champ scalaire ». On dit qu'un champ est « uniforme » dans une région de l'espace si sa valeur en tout point de cette région est la même. Pour un champ scalaire non uniforme, on peut considérer l'ensemble des points où il prend un même valeur donnée c. Si f est suffisamment régulière, on obtient ainsi une surface, dite « surface de niveau », d'équation $f(x, y, z) = c$.

Enfin, on considère souvent des grandeurs **vectorielles** qui dépendent de la position dans l'espace (par exemple champ gravitationnel, champ électromagnétique, etc.). Une telle grandeur est un vecteur défini par ses trois coordonnées, trois fonctions de x, y, z. On appelle ça un « champ vectoriel ».

1.3 Dérivées directionnelles

Soit une fonction $f(x, y, z)$. En tout point (a, b, c) et pour tout vecteur $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, on définit la dérivée directionnelle de f en (a, b, c) selon $\overrightarrow{u}$, notée $D_{\overrightarrow{u}} f(a, b, c)$, de la manière suivante. On pose $g(t) = f(a + tu_1, b + tu_2, c + tu_3)$, et (quand g est dérivable...) :

$$D_{\overrightarrow{u}} f(a, b, c) = g'(0)$$

Les dérivées directionnelles ainsi définies, on introduit des notations pour trois d'entre elles, que l'on appelle les « dérivées partielles » de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) = D_{(1,0,0)} f(a, b, c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) = D_{(0,1,0)} f(a, b, c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) = D_{(0,0,1)} f(a, b, c)$$

En pratique, quand f est donnée par une formule, on calcule ses dérivées partielles en utilisant les formules classiques pour le calcul des dérivées. Par exemple, pour calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$, on suppose x et z constants et on dérive l'expression de f comme une fonction d'une seule variable y.

Exercice : montrez que les fonctions représentées sur les figures 1 p. 3 et 2 p. 4 ont des dérivées partielles en $(0, 0)$. Pour l'une de ces deux fonctions, les dérivées partielles ne sont pas continues en $(0, 0)$; laquelle ?

Attention : pour une fonction f d'une seule variable x, quand on introduit une nouvelle variable ξ au moyen d'un changement de variable, on a l'habitude d'utiliser la formule suivante :

$$\frac{df}{d\xi} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{d\xi}$$

Cette formule se justifie intuitivement en disant que l'on « multiplie en haut et en bas » par dx, les dérivées étant assimilées à des quotients. Pour les dérivées partielles, on ne peut pas faire ça. Si par exemple ξ, ζ, η désigne trois nouvelles variables, $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ est bien, intuitivement, le quotient entre les accroissements de f et de ξ, mais *à ζ constant et η constant.* De même pour $\frac{\partial x}{\partial \xi}$. Par

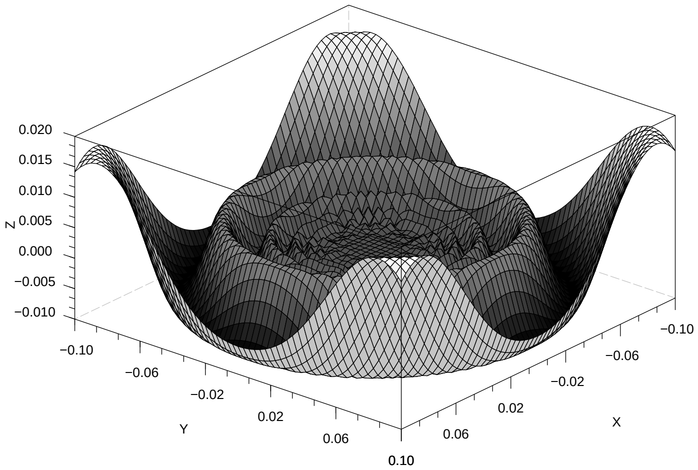

FIGURE 1 – surface d'équation $z = (x^2 + y^2)\sin(1/\sqrt{x^2 + y^2})$

contre, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ désigne le quotient entre les accroissements de f et de x, *à y constant et z constant.* Donc la formule ci-dessus n'a plus cours. On préférera la formule suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}$$

Plus généralement, si f est suffisamment régulière, toutes ses dérivées directionnelles peuvent s'écrire au moyen de trois dérivées partielles :

$$D_{\vec{u}} f(a, b, c) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c)\right) u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c)\right) u_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c)\right) u_3$$

Tout cela justifie aussi le symbolisme des « formes différentielles » :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Attention : même si la nouvelle variable ξ était choisie toujours égale à x, il est fort possible que $\dfrac{\partial f}{\partial \xi} \neq \dfrac{\partial f}{\partial x}$. Le quotient de gauche s'entend « à η constant et ζ constant », alors que le quotient de droite s'entend « à y constant et z constant ».

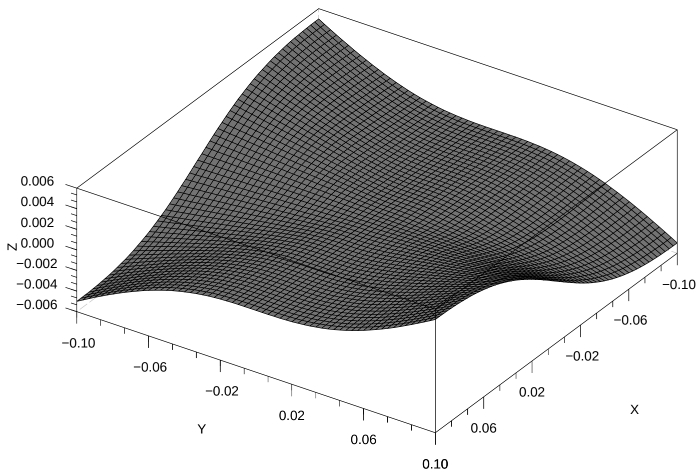

FIGURE 2 – surface d'équation $z = \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}$

2 Recherche d'extrema

2.1 Domaine ouvert

Soit $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ une fonction de n variables définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On cherche les coordonnées des extrema, c'est-à-dire les coordonnées des minima et des maxima atteints par f. Il faut commencer par calculer les *points critiques*, c'est-à-dire les solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

Les extrema sont des points critiques, mais les points critiques ne sont pas tous des extrema. Il existe un critère commode pour repérer certains extrema parmi les points critiques. Pour chaque point critique, il faut calculer la matrice *hessienne* de f :

$$H(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

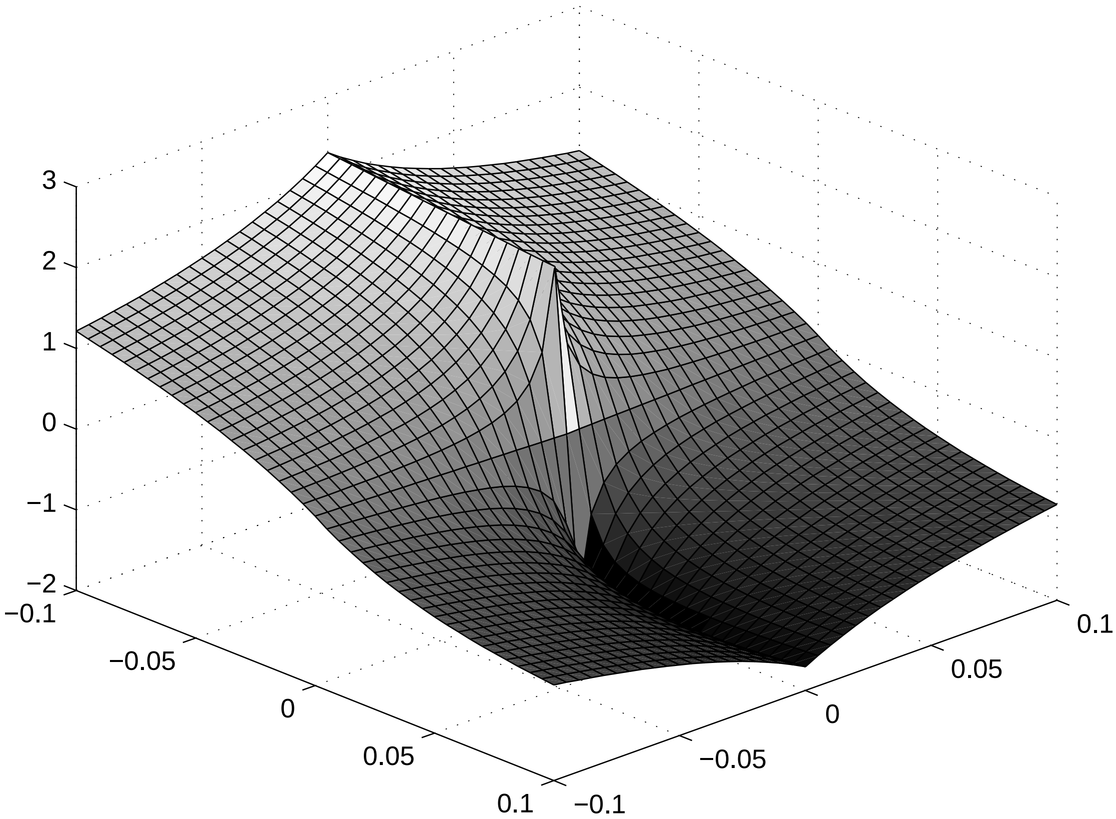

FIGURE 3 – surface d'équation $z = \dfrac{((x-1)^2 + y^2)\ln((x-1)^2 + y^2)}{|x| + |y|}$

Il faut calculer les *mineurs principaux* de la hessienne, c'est-à-dire les déterminants suivants :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}, \quad \ldots$$

On les appelle respectivement mineur principal de rang 1, mineur principal de rang 2, mineur principal de rang 3, *etc.*. On remarque que le mineur principal de rang 1 est la cellule supérieure gauche de la hessienne, et que le mineur principal de rang maximal est le déterminant de la hessienne. On étudie alors les signes des mineurs principaux :

a) Si les mineurs principaux sont tous strictement positifs ($> 0,\ > 0,\ > 0, \ldots$), on dit que la hessienne est *définie positive* ; alors le point critique est un *minimum local strict.*

b) Si les mineurs principaux sont de signes alternés, non nuls et que le mineur de rang 1 est négatif ($< 0,\ > 0,\ < 0, \ldots$), on dit que la hessienne est *définie négative* ; alors le point critique est un *maximum local strict.*

Si la hessienne n'est ni définie positive, ni définie négative, il faut travailler davantage. On doit alors s'intéresser à *tous* les mineurs axés sur la diagonale. Par exemple, dans le cas $n = 3$, il y a plusieurs mineurs de rang 2 axés sur la diagonale :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

On étudie alors les signes de tous les mineurs axés sur la diagonale :

a) Si les mineurs axés sur la diagonale sont tous positifs (bien que certains soient nuls), on dit que la hessienne est *positive* (mais pas *définie*).

b) Si les mineurs axés sur la diagonale sont de signes alternés, au sens où tous les mineurs de rang 1 sont ≤ 0, tous les mineurs de rang 2 sont ≥ 0, tous les mineurs de rang 3 sont ≤ 0, *etc.*, on dit que la hessienne est *négative* (mais pas *définie*).

Si la hessienne n'est ni positive, ni négative, alors ce point critique n'est pas un extremum. Si elle est positive ou négative, alors il faut encore travailler davantage : on ne peut pas s'en tenir à l'étude des dérivées partielles secondes. Il faut alors étudier manuellement le signe de l'expression suivante pour $u_1, u_2, \ldots, u_n$ petits :

$$f(x_1 + u_1, x_2 + u_2, \ldots, x_n + u_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Exemples. La fonction $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$ (*cf.* fig. 4 p. 8) présente trois points critiques sur l'ouvert $]0, \pi[\times]0, \pi[$:

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right), \quad \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Les deux premiers sont des maxima locaux car la hessienne est définie négative. En revanche, la hessienne au point $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ est la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est ni définie positive, ni définie négative, mais elle n'est ni positive ni négative, donc ce point n'est pas un extremum.

La fonction $g(x,y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$ de la fig. 5 p. 8 définie sur $\mathbb{R}^2$ présente un unique point critique en $(0,0)$. La hessienne n'y est pas définie mais est quand même positive. Il faut alors étudier manuellement le signe de $g(x,y) - g(0,0)$ pour x, y petits. Le long de l'axe Oy, cette expression est positive :

$$g(0,y) - g(0,0) = y^2 > 0$$

En revanche, près de l'axe Ox, pour x petit :

$$g(x, tx^2) - g(0,0) = x^4(2 - 3t + t^2)$$

Il existe des valeurs de t pour lesquelles cette expression est négative. Donc le point $(0,0)$ n'est ni un maximum ni un minimum.

La fonction $h(x,y) = x^2y + ln(1+y^2)$ (*cf.* fig. 6 p. 9) définie sur $\mathbb{R}^2$ possède un unique point critique en $(0,0)$. La hessienne n'y est pas définie mais est quand même positive. Il faut alors étudier manuellement le signe de $h(x,y) - h(0,0)$ pour x, y petits. Le long de l'axe Oy, cette expression est positive. En revanche, près de l'axe Ox, pour x petit :

$$h(x, tx^2) - h(0,0) = x^4(t + t^2 + t^2\varepsilon(tx^2))$$

Il existe des valeurs de t pour lesquelles cette expression est négative quand x reste au voisinage de 0. Donc le point $(0,0)$ n'est ni un maximum ni un minimum.

La fig. 7 p. 9 est encore un autre exemple semblable aux deux précédents.

La fonction $k(x,y) = x^2(1+y)^3 + y^4$ de la fig. 8 p. 10 est définie sur $\mathbb{R}^2$. Elle possède un unique point critique en $(0,0)$. La hessienne n'y est pas définie mais est quand même positive. Il faut alors étudier manuellement le signe de $k(x,y) - k(0,0)$ pour x, y petits. On observe que

$$k(x,y) - k(0,0) = x^2(1+3y) + y^2(x^2(3+y) + y^2),$$

or cette expression est positive quand y est au voisinage de 0. Ce point est donc bien un minimum local. Remarquons toutefois que ce n'est pas un minimum global, car

$$\lim_{x \to -\infty} f(x,x) = -\infty.$$

2.2 Domaine fermé

Soit $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ une fonction de n variables définie sur un fermé de $\mathbb{R}^n$. On cherche les coordonnées des extrema, c'est-à-dire les coordonnées des minima et des maxima atteints par f. Quand le domaine est défini par un système d'équations ou d'inéquations, on parle parfois d'*optimisation sous contrainte*.

La méthode dite *des multiplicateurs de Lagrange* est particulièrement adaptée lorsque le domaine est défini par un système d'équations ; mais l'optimisation sur un fermé de $\mathbb{R}^n$ défini par une *inéquation* peut facilement se ramener à l'optimisation sur un fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par une *équation*. Soit par exemple la fonction $f(x,y) = 2x^3 + y^4$ (fig. 9 p. 12) à optimiser sur le disque unité $x^2 + y^2 \leq 1$. Ce problème revient à optimiser la fonction $f(x,y,z) = 2x^3 + y^4$ sur le fermé de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2.$$

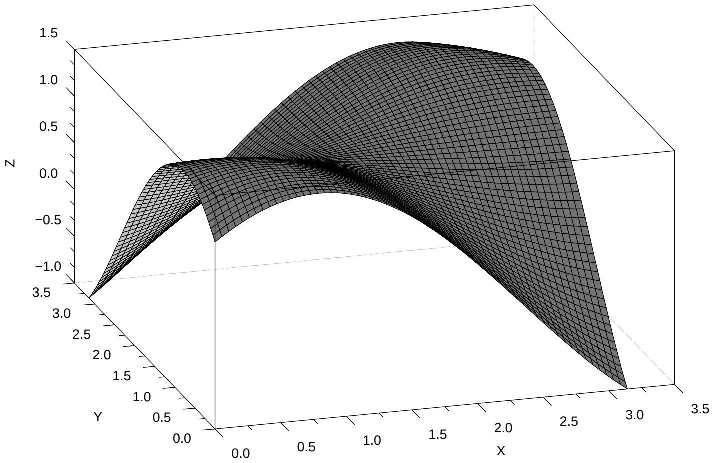

FIGURE 4 – surface d'équation $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$

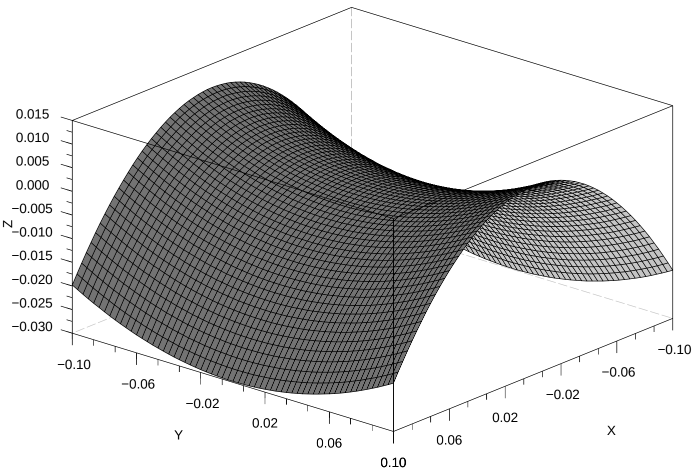

FIGURE 5 – surface d'équation $z = 2x^4 - 3x^2y + y^2$

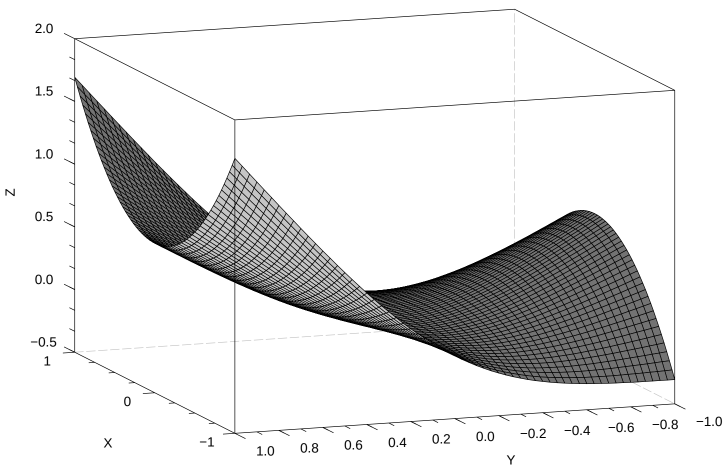

FIGURE 6 – surface d'équation $z = x^2y + \ln(1 + y^2)$

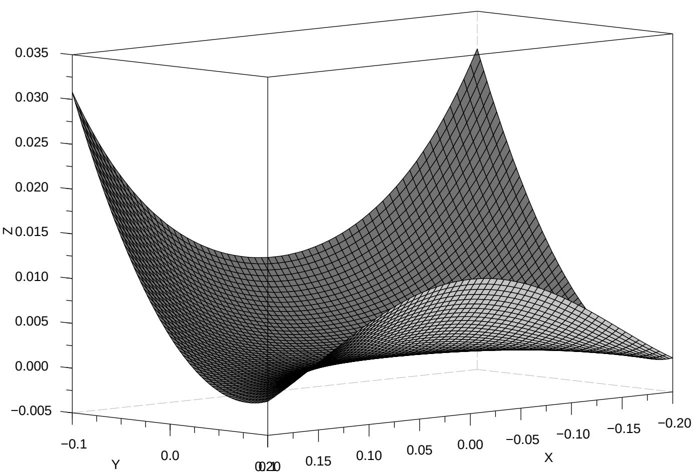

FIGURE 7 – surface d'équation $z = (x^2 - y)(3x^2 - y)$

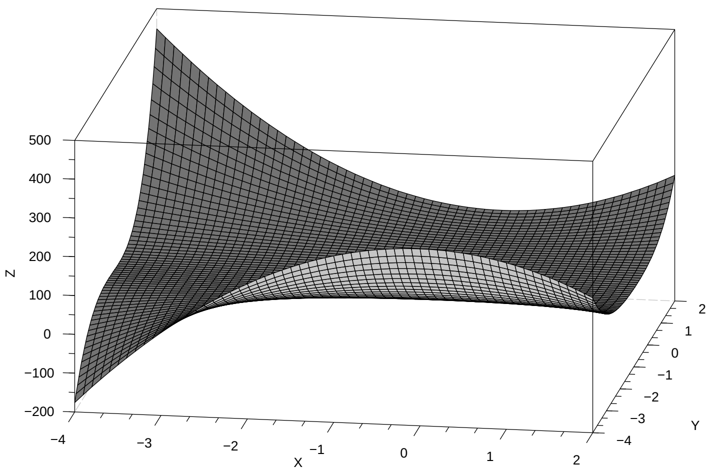

FIGURE 8 – surface d'équation $z = x^2(1+y)^3 + y^4$

Montrons à présent comment résoudre ce problème. On pose $g(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2$. La contrainte est l'équation $g(x, y, z) = 0$. On introduit une nouvelle indéterminée λ (le « multiplicateur de Lagrange »). Il faut alors résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(f+\lambda g)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial(f+\lambda g)}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial(f+\lambda g)}{\partial z} = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Les solutions de ce système fournissent les couples (x, y) suivants :

$$(0,0),\ (0,\pm 1),\ (\pm 1, 0), \left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Il faut alors chercher lesquels, parmi ces points, sont des extrema locaux.

Le point $(0,0)$ est situé à l'*intérieur* du domaine $x^2 + y^2 \leq 1$. Ce domaine contient un ouvert de $\mathbb{R}^2$ qui est un petit voisinage $(0,0)$, et on peut y utiliser les méthodes de la section précédente (points critiques, hessienne,...) pour savoir si ce point est un extremum local. En l'occurence, $(0,0)$ n'est pas un extremum.

Au contraire, les autres points sont situés sur le *bord* du domaine. Il faut donc, pour chacun, étudier manuellement le signe de l'expression $f(x+u, y+v, z+w) - f(x, y, z)$ avec u, v, w petits, sous la contrainte $g(x+u, y+v, z+w) = 0$. Il faut dans un premier temps chercher une représentation paramétrique du domaine au voisinage du point étudié.

Par exemple, pour le point $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, la contrainte est

$$1 - \left(\frac{1}{2} + u\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + v\right)^2 - w^2 = 0$$

Quand u, v, w sont petits, on voit facilement qu'on peut alors écrire :

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} + u\right)^2 - w^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

C'est une représentation paramétrique du domaine au voisinage de ce point, avec les paramètres u et w. On peut alors éliminer v, et on montre que

$$f\left(\frac{1}{2} + u, \frac{\sqrt{3}}{2} + v, w\right) - f\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) = \frac{5}{2}u^2 - \frac{3}{2}w^2 + (\text{monômes en } u \text{ et } w \text{ de degrés } \geq 3)$$

où l'on voit que ce point n'est pas un extremum local.

De même, autour du point $(0, 1)$, la contrainte est :

$$1 - u^2 - (1 + v)^2 - w^2 = 0$$

Quand u, v, w sont petits, on peut écrire :

$$v = \sqrt{1 - u^2 - w^2} - 1$$

C'est une représentation paramétrique du domaine au voisinage de ce point, avec les paramètres u et w. On élimine v dans l'expression de la fonction f, et on montre que

$$f(u, 1 + v, w) - f(0, 1, 0) = -2u^2 - 2w^2 + 2u^3 + u^4 + 2u^2w^2 + w^4$$

où l'on voit que ce point est un maximum local.

Parfois, certains arguments de symétrie permettent de conclure quant à l'existence d'extrema : dans cet exemple, comme $f(x, -y) = f(x, y)$, alors le point $(0, -1)$ est un extremum de même nature que le point $(0, 1)$, et le point $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ n'est pas un extremum local puisque $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ n'en est pas un.

Enfin, il faut savoir qu'une fonction continue sur un domaine fermé qui est une « portion finie » de $\mathbb{R}^2$ atteint nécessairement au moins un maximum global et un minimum global[1]. Or :

$$f(0, \pm 1) = 1, \quad f(1, 0) = 2, \quad f(-1, 0) = -2, \quad f\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{13}{16}$$

Le maximum global de f est donc atteint en $(1, 0)$, et son minimum global en $(-1, 0)$.

1. Un fermé qui est une « portion finie » de $\mathbb{R}^2$ s'appelle un *compact*. Ce théorème sur les extrema globaux d'une fonction continue sur un compact est l'analogue du théorème de Weierstraß pour les fonctions d'une seule variable.

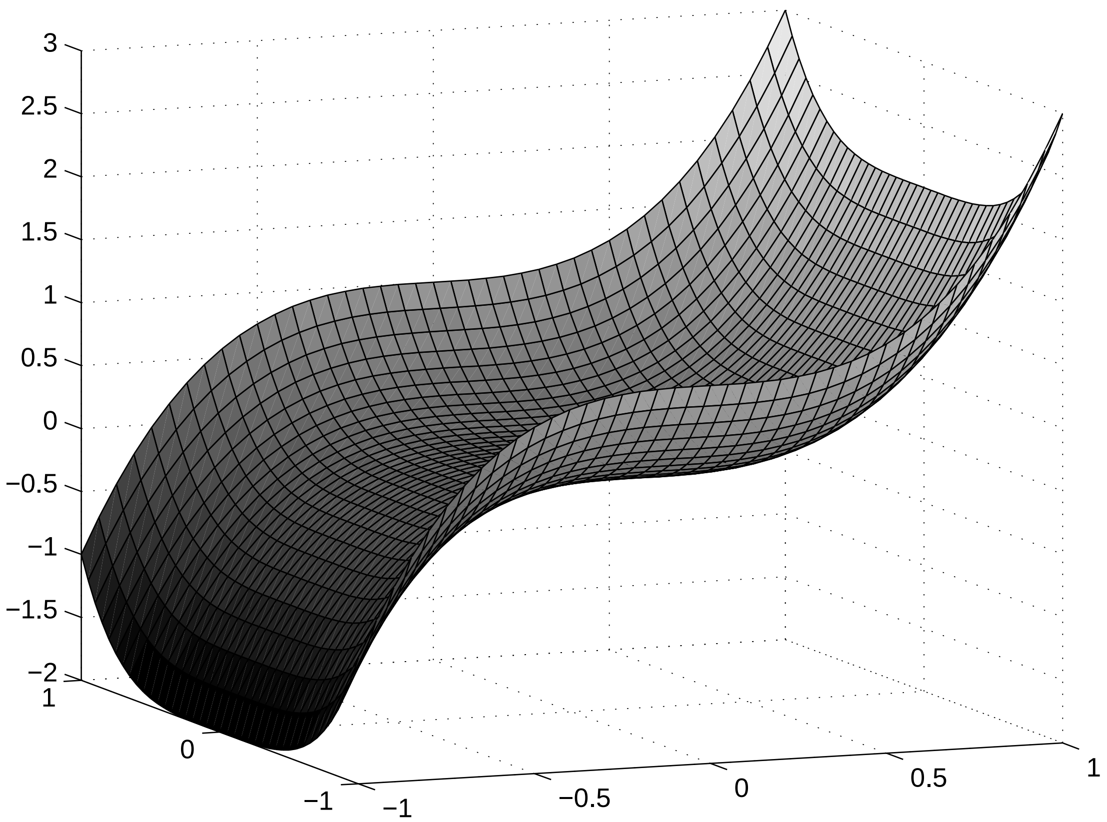

FIGURE 9 – surface d'équation $z = 2x^3 + y^4$

2.3 Cas particulier : domaine fermé convexe

Une fonction convexe définie sur un domaine convexe atteint tous ses maxima locaux sur le bord de son domaine. Une fonction concave définie sur un domaine convexe atteint tous ses minima locaux sur le bord de son domaine.

Exemple. Soit à chercher les extrema de la fonction $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + x + y$ (*cf.* fig. 10 p. 14) sur le domaine fermé défini par les inéquations suivantes :

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \\ x + y + 3 \geq 0 \end{cases}$$

La fonction f est convexe (on peut le vérifier en calculant sa hessienne qui est partout positive) ; d'autre part le domaine est une figure convexe, c'est un triangle de sommets

$$A = (0, 0),\ B = (-3, 0),\ C = (0, -3).$$

Alors f atteint ses maximas locaux sur le bord du triangle. Mais le bord du triangle est constitué de trois côtés. Chacun de ces trois segments est à nouveau une figure convexe. Si l'on restreint le domaine de f à l'un des trois côtés, on voit que ses maxima sur ce côté sont atteints en son bord, c'est-à-dire aux sommets du triangle. Donc les maxima locaux de f sur le triangle sont à chercher parmi les trois points A, B, C.

Si l'on se souvient qu'une fonction continue sur un domaine fermé qui est une « portion finie » de $\mathbb{R}^2$ atteint nécessairement au moins un maximum global (voir section précédente), et comme $f(A) = 0$ mais $f(B) = f(C) = 6$, on en conclut que B et C sont les maxima globaux de f sur le triangle. En étudiant manuellement le signe de $f(u, v) - f(0, 0)$, on montre facilement que A est un maximum local. On connaît ainsi tous les maxima locaux. Cette méthode ne fournit pas les minima.

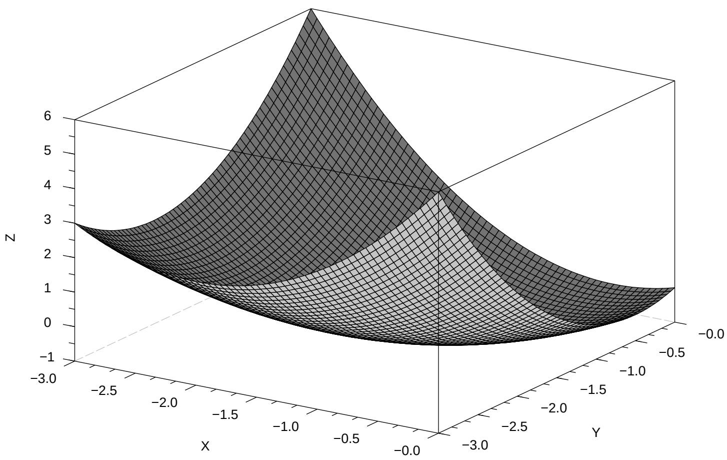

FIGURE 10 – surface d'équation $z = x^2 - xy + y^2 + x + y$

3 Opérateurs différentiels

3.1 Définitions

A chaque champ scalaire, on va associer un champ vectoriel appelé son *gradient*. Et à chaque champ vectoriel, on associera un autre champ vectoriel appelé son *rotationnel*. Enfin à chaque champ vectoriel, on associera aussi un champ scalaire appelé sa *divergence*. On définit ainsi trois « opérateurs », c'est-à-dire des applications :

$$\{\text{champs scalaires}\} \xrightarrow{\text{grad}} \{\text{champs vectoriels}\} \xrightarrow{\text{rot}} \{\text{champs vectoriels}\} \xrightarrow{\text{div}} \{\text{champs scalaires}\}$$

Voici la définition de ces trois opérateurs dans un repère cartésien :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{E}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}, \qquad \text{div}(\overrightarrow{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Ces définitions peuvent sembler compliquées et arbitraires. Pourtant, on pourrait montrer que ces opérateurs sont les **seuls** à vérifier certaines propriétés :

1. **Linéarité**. Le gradient, le rotationnel et la divergence sont des opérateurs linéaires. Si f

et g sont des champs scalaires, α un réel, $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$ des champs vectoriels, on a :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f+g) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) + \overrightarrow{\mathrm{grad}}(g)\\
&\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\alpha f) = \alpha.\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\\[1em]
&\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{V}+\overrightarrow{W}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{V}) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{W})\\
&\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\alpha\overrightarrow{V}) = \alpha.\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{V})\\[1em]
&\mathrm{div}(\overrightarrow{V}+\overrightarrow{W}) = \mathrm{div}(\overrightarrow{V}) + \mathrm{div}(\overrightarrow{W})\\
&\mathrm{div}(\alpha\overrightarrow{V}) = \alpha.\mathrm{div}(\overrightarrow{V})
\end{aligned}$$

2. **Des propriétés d'invariance**. Supposons que l'on change de repère cartésien. On a donc de nouvelles coordonnées ξ, ζ, η, et comme on l'a vu, les trois dérivées partielles selon ces coordonnées sont très différentes des dérivées partielles selon x, y, z. On pourrait donc s'attendre à ce que le vecteur gradient (dont les coordonnées sont les dérivées partielles de f), calculé après changement de repère, soit très différent du vecteur gradient calculé avant changement de repère. Mais en fait, ils sont tous deux égaux. Ainsi, bien que sa définition ci-dessus ne soit pas intrinsèque, le vecteur gradient est **invariant** lors d'un changement de repère cartésien. Le rotationnel et la divergence aussi.

   Pour le gradient, ce sera plus évident si l'on en donne une description intrinsèque (c'est-à-dire indépendante du repère choisi), au moins quant à sa direction : le gradient de f au point (x, y, z) est *perpendiculaire* à la surface de niveau de f passant par ce point. Il est dirigé suivant la direction de la variation la plus rapide de f, dans le sens des valeurs croissantes.

3. **Des propriétés analogues à celle de la dérivée**. Si f et g sont des champs scalaires, $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$ des champs vectoriels, on a :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{grad}}(fg) = f.\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) + g.\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\\
&\overrightarrow{\mathrm{rot}}(f\overrightarrow{V}) = f.\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{V}) + \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) \wedge \overrightarrow{V}\\
&\mathrm{div}(f\overrightarrow{V}) = f.\mathrm{div}(\overrightarrow{V}) + \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) \cdot \overrightarrow{V}\\
&\mathrm{div}(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}) = \overrightarrow{W} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{V}) - \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{W})
\end{aligned}$$

   D'autre part, les gradients des fonctions coordonnées sont les vecteurs de base :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}((x,y,z) \mapsto x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{grad}}((x,y,z) \mapsto y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{grad}}((x,y,z) \mapsto z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. **Certaines relations profondes**. Gradient et rotationnel d'une part, rotationnel et divergence d'autre part sont unis par certaines relations profondes. Si f est suffisamment régulière, le *théorème de Schwartz* affirme que :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)) = \overrightarrow{0}$$

   Ce théorème a une réciproque. Soit $\overrightarrow{E}$ un champ vectoriel. Supposons que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{0}$. Sous certaines conditions que l'on ne précisera pas ici [2], le *théorème de Poincaré* affirme

2. Régularité de $\overrightarrow{E}$ et, surtout, son domaine de définition qui doit être un « ouvert étoilé ».

qu'il existe alors un champ scalaire f tel que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\text{grad}}(f)$. Voir plus loin la démonstration de ce théorème.
De même, soit $\overrightarrow{V}$ est un champ vectoriel, on a :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{V})) = 0$$

Réciproquement, si $\overrightarrow{A}$ est un champ vectoriel tel que $\text{div}(\overrightarrow{A}) = 0$, alors il existe un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ tel que $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{V})$.

3.2 Théorème de Poincaré

Dans cette section, on va démontrer un cas particulier du théorème de Poincaré :

Théorème 3.1 *Soit $\overrightarrow{E}$ un champ vectoriel défini sur $\mathbb{R}^3$ tout entier :*

$$\begin{array}{rccc} \overrightarrow{E}: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} E_x(x,y,z) \\ E_y(x,y,z) \\ E_z(x,y,z) \end{pmatrix} \end{array}$$

Supposons que $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{0}$. Alors il existe alors un champ scalaire f tel que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{grad}(f)$.

Démonstration. Soit la fonction f définie par :

$$f(x,y,z) = \int_0^1 \overrightarrow{E}(xt,yt,zt) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt$$

Développons le produit scalaire :

$$f(x,y,z) = \int_0^1 \left(\overrightarrow{E}_x(xt,yt,zt)x + \overrightarrow{E}_y(xt,yt,zt)y + \overrightarrow{E}_z(xt,yt,zt)z\right) dt$$

En dérivant à l'intérieur du signe $\int$ on obtient (c'est possible dès que $\overrightarrow{E}$ est suffisamment régulier) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^1 \left(\overrightarrow{E}_x(xt,yt,zt) + \frac{\partial \overrightarrow{E}_x}{\partial x}(xt,yt,zt)xt + \frac{\partial \overrightarrow{E}_y}{\partial x}(xt,yt,zt)yt + \frac{\partial \overrightarrow{E}_z}{\partial x}(xt,yt,zt)zt\right) dt \\ \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\partial \overrightarrow{E}_x}{\partial y}(xt,yt,zt)xt + \overrightarrow{E}_y(xt,yt,zt) + \frac{\partial \overrightarrow{E}_y}{\partial y}(xt,yt,zt)yt + \frac{\partial \overrightarrow{E}_z}{\partial y}(xt,yt,zt)zt\right) dt \\ \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\partial \overrightarrow{E}_x}{\partial z}(xt,yt,zt)xt + \frac{\partial \overrightarrow{E}_y}{\partial z}(xt,yt,zt)yt + \overrightarrow{E}_z(xt,yt,zt) + \frac{\partial \overrightarrow{E}_z}{\partial z}(xt,yt,zt)zt\right) dt \end{pmatrix}$$

Mais on connaît une primitive pour chacune de ces intégrandes. Par exemple :

$$\overrightarrow{E}_x(xt,yt,zt) + \frac{\partial \overrightarrow{E}_x}{\partial x}(xt,yt,zt)xt + \frac{\partial \overrightarrow{E}_y}{\partial x}(xt,yt,zt)yt + \frac{\partial \overrightarrow{E}_z}{\partial x}(xt,yt,zt)zt = \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{E}_x(xt,yt,zt)t\right)$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} \left[\overrightarrow{E}_x(xt,yt,zt)t\right]_0^1 \\ \left[\overrightarrow{E}_y(xt,yt,zt)t\right]_0^1 \\ \left[\overrightarrow{E}_z(xt,yt,zt)t\right]_0^1 \end{pmatrix}$$

D'où finalement $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \overrightarrow{E}$, ce qu'il fallait démontrer.

Contre-exemple. Si $\overrightarrow{E}$ n'est pas défini sur $\mathbb{R}^3$ tout entier, il arrive que le théorème de Poincaré soit en défaut. Par exemple pour le champ suivant :

$$\overrightarrow{E}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.3 Autres systèmes de coordonnées

Dans la section précédente, on a vu que les opérateurs $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ et div sont invariants : la définition en termes de dérivées partielles est valable quelque soit le repère cartésien. Mais on voudrait aussi savoir calculer $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ et div en fonction de coordonnées cylindriques ou sphériques. On verra seulement le cas de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$.

3.3.1 Coordonnées polaires

On rappelle qu'un point M de l'espace de coordonnées cartésiennes (x,y,z) a pour coordonnées cylindriques (ρ,θ,z) avec

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \quad z = z$$

où $\rho \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Pour tout champ scalaire f, on a alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\overrightarrow{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{k}$$

où les vecteurs $\overrightarrow{e_\rho}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{k}$ sont définis [3] par :

$$\overrightarrow{e_\rho}(\rho,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{e_\theta}(\rho,\theta,z) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.3.2 Coordonnées sphériques

On rappelle qu'un point M de l'espace de coordonnées cartésiennes (x,y,z) est repéré en coordonnées sphériques (r,θ,ϕ) avec :

$$x = r\cos\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\cos\phi, \quad z = r\sin\phi$$

3. (dans la base associé au repère cartésien sous-jacent)

où $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$. L'angle θ est souvent appelé « longitude », et l'angle ϕ « latitude »[4]. Pour tout champ scalaire f, on a alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\overrightarrow{e}_\phi$$

où les vecteurs $\overrightarrow{e}_r$, $\overrightarrow{e}_\theta$ et $\overrightarrow{e}_\phi$ sont définis par :

$$\overrightarrow{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{\| \overrightarrow{OM} \|}, \qquad \overrightarrow{e}_\theta(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{e}_\phi = \overrightarrow{e}_r \wedge \overrightarrow{e}_\theta$$

3.4 Symboles

Pour calculer $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ et div, il est commode d'utiliser le symbole $\overrightarrow{\nabla}$:

$$\overrightarrow{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Les trois opérateurs différentiels s'écrivent alors en termes de multiplication, produit extérieur et produit scalaire :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \overrightarrow{\nabla} f$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E}$$
$$\mathrm{div}(\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E}$$

Attention à ne pas confondre $\overrightarrow{\nabla}$ avec le *laplacien* $\triangle$, un opérateur différentiel d'ordre 2 défini par :

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Remarquez que l'on peut écrire :

$$\triangle(f) = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}})(f) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} f,$$

ce qui amène parfois à noter $\triangle = \nabla^2$.

4. Dans le système de coordonnées « horizontales » parfois utilisé en astronomie ou en navigation, θ s'appelle « azimut » et ϕ « hauteur ».

4 Annexe : tracer une surface avec Scilab ou Matlab

```
scf(1);
clf();
C=graycolormap(32);
xset("colormap",C);
xset("hidden3d",25);
x=linspace(-0.1,0.1,61);
y=linspace(-0.1,0.1,61);
function z=f(x,y);
  if x==0 & y==0 then, z=0,
  else, z=(x^2+y^2)*sin(1/sqrt(x^2+y^2)), end;
endfunction;
for i=[1:61], for j=[1:61], z(i,j)=f(x(i),y(j)); end, end;
plot3d1(x,y,z, flag=[15,2,4]);
```

TABLE 1 – code Scilab pour la figure 1 p. 3

```
colormap(gray(32))
[X,Y]=meshgrid(-.1:.005:.1);
for i=1:41, for j=1:41,
  Z(i,j)=((X(i,j)-1)^2+Y(i,j)^2)*...
    log((X(i,j)-1)^2+Y(i,j)^2)/(abs(X(i,j))+abs(Y(i,j))+eps);
end, end;
surf(X,Y,Z,'EdgeColor','black');
```

TABLE 2 – code Matlab (idiome indiciel) pour la figure 3 p. 5

```
colormap(gray(32))
[X,Y]=meshgrid(-1:.05:1);
Z=2.*X.^3+Y.^4;
surf(X,Y,Z,'EdgeColor','black');
```

TABLE 3 – code Matlab (idiome opérateurs) pour la figure 9 p. 12