Mathématiques financières

Erwan Penchèvre

2011–2014

1 Espérance conditionnelle

Tous les espaces de probabilité Ω seront, jusqu'à mention explicite du contraire, des ensembles finis et tels que $(\forall \omega \in \Omega) \quad p(\{\omega\}) > 0$.

Définition 1.1 *Soit A et B deux événements, $p(B) \neq 0$, on rappelle que la* probabilité conditionnelle *de A sachant B est le nombre noté*

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Définition 1.2 (espérance conditionnelle sachant un événement) *Soit X une variable aléatoire et B un événement. L'*espérance conditionnelle de X sachant B *est le nombre*

$$\mathrm{E}(X \mid B) = \sum_{n \in X(\Omega)} n p(X = n \mid B)$$

Proposition 1.1

$$\mathrm{E}(X \mid B) = \frac{\mathrm{E}(X \mathbb{1}_B)}{p(B)}$$

Définition 1.3 *Soit ξ une variable aléatoire et $\phi : \xi(\Omega) \longrightarrow E$ une fonction à valeurs dans un ensemble E quelconque. Alors $\phi \circ \xi$ est une variable aléatoire à valeurs dans E, notée $\phi(\xi)$. On dit que c'est une* fonction déterministe de ξ *(puisque sa valeur, bien qu'aléatoire, est entièrement déterminée par celle de ξ)*

Définition 1.4 (loi conditionnelle d'une variable sachant ξ) *Soit ξ et X deux variables aléatoires, et ϕ la fonction définie par :*

$$\phi : \begin{array}{ccc} X(\Omega) \times \xi(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ (n,k) & \longmapsto & p(X = n \mid \xi = k) \end{array}$$

Alors à n fixé, $\phi(n,\xi)$ est une variable aléatoire, fonction déterministe de ξ, que l'on note

$$\pi_X(n \mid \xi)$$

Autrement dit

$$(\forall (n,\omega) \in X(\Omega) \times \Omega) \quad \pi_X(n \mid \xi)(\omega) = p(X = n \mid \xi = \xi(\omega))$$

Définition 1.5 (espérance conditionnelle sachant ξ) *Soit ξ et X deux variables aléatoires. L'*espérance conditionnelle de X sachant ξ *est une fonction déterministe de ξ, notée* $\mathrm{E}(X \mid \xi)$ *et définie par :*

$$\mathrm{E}(X \mid \xi) = \sum_{n \in X(\Omega)} n \pi_X(n \mid \xi)$$

Autrement dit,

$$\mathrm{E}(X \mid \xi)(\omega) = \mathrm{E}(X \mid \xi = \xi(\omega))$$

Proposition 1.2 *L'espérance conditionnelle sachant ξ vérifie les propriétés suivantes :*

(i) Linéarité :

$$\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y \mid \xi) = \lambda \mathrm{E}(X \mid \xi) + \mu \mathrm{E}(Y \mid \xi)$$

(ii) Positivité : si $X \geq 0$, alors $\mathrm{E}(X \mid \xi) \geq 0$ (et alors l'égalité n'est possible que si X est identiquement nulle).

(iii) Si X est une fonction déterministe de ξ, alors

$$\mathrm{E}(X \mid \xi) = X$$

(iv) Si Z est une fonction déterministe de ξ, et X une variable aléatoire quelconque, alors

$$\mathrm{E}(ZX \mid \xi) = Z\mathrm{E}(X \mid \xi)$$

(v) Soit Z une fonction déterministe de ξ à valeurs dans un ensemble F, et X une variable aléatoire quelconque à valeurs dans un ensemble E. Soit $H : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables ; alors $H(X, Z)$ est une variable aléatoire. Soit K la fonction définie par :

$$K : \begin{array}{ccc} \Omega \times F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\omega, z) & \longmapsto & \mathrm{E}(H(X, z) \mid \xi)(\omega) \end{array}$$

Alors on a :

$$(\forall \omega \in \Omega) \quad \mathrm{E}(H(X, Z) \mid \xi)(\omega) = K(\omega, Z(\omega))$$

(vi) $\mathrm{E}(X \mid \xi)$ est l'unique variable Y fonction déterministe de ξ vérifiant la propriété suivante : *Pour toute variable Z fonction déterministe de ξ, on a* $\mathrm{E}(XZ) = \mathrm{E}(YZ)$.

(vii) Si X est une variable aléatoire quelconque, alors

$$\mathrm{E}(\mathrm{E}(X \mid \xi)) = \mathrm{E}(X)$$

(viii) Si X et ξ sont des variables aléatoires indépendantes, alors

$$\mathrm{E}(X \mid \xi) = \mathrm{E}(X)$$

Remarques

- La propriété (vii) rappelle le calcul d'une moyenne statistique au sein d'une population groupée par classes.
- La réciproque de la propriété (viii) est fausse.
- N'oublions pas qu'on a fait l'hypothèse d'un modèle fini discret. La définition 1.5 est difficile à généraliser ; en revanche, la propriété (vi) fournit une caractérisation de l'espérance conditionnelle valable aussi pour les variables continues.

2 Algèbres et tribus

Définition 2.1 *Une* tribu *sur* Ω *est un ensemble* $\mathscr{A}$ *de parties de* Ω *stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable. Autrement dit,*

$$\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega),$$

et pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathscr{A}$*, l'événement*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

est encore un élément de $\mathscr{A}$*.*

Au moyen de la formule de Morgan, on montre qu'une tribu est stable par intersection dénombrable : l'événement

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

est aussi un élément de $\mathscr{A}$.

Remarques

- Quand Ω est un ensemble fini (comme c'est ici le cas), on appelle une tribu *algèbre*, l'opération $\cup$ étant alors l'analogue de l'addition algébrique, et l'opération $\cap$ l'analogue de la multiplication.
- L'ensemble des parties de Ω noté $\mathscr{P}(\Omega)$ est lui-même une tribu.
- Dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, p)$, l'ensemble $\mathscr{A}$ de tous les événements (conçus comme des sous-ensembles de l'ensemble Ω des événements élémentaires) doit être une tribu. Ceci garantit l'universalité de la règle pour calculer la probabilité d'une réunion disjointe :

  $$p\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n)$$

  Lorsque Ω est de cardinal fini (comme c'est ici le cas), on peut toujours prendre $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$; au contraire, pour les modèles continus, ce n'est pas toujours possible.

Définition 2.2 *Si* $\mathscr{A}$ *et* $\mathscr{B}$ *sont deux tribus telles que* $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$*, on dit que* $\mathscr{A}$ *est une sous-tribu de* $\mathscr{B}$*, et que* $\mathscr{B}$ *est* plus fine *que* $\mathscr{A}$*.*

Exemple fondamental Soit $B_1, B_2, \ldots, B_n$ des événements constituant une partition de Ω :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

$$(\forall i \neq j) \quad B_i \cap B_j = \varnothing$$

Posons

$$\mathscr{B} = \{B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \ldots \cup B_{i_k} \mid k \in \mathbb{N},\ i_1, i_2, \ldots, i_k \in [\![1, n]\!]\}$$

$\mathscr{B}$ est une tribu, appelée *tribu engendrée par cette partition.* On dit que les B_i sont les *atomes* de cette tribu.

Réciproque En fait, toute tribu finie est une tribu engendrée par une partition. Soit en effet $\mathscr{B}$ une tribu de cardinal fini. Nommons $B_1, B_2, ..., B_n$ les éléments de $\mathscr{B}$ qui ne contiennent pas d'autre élément de $\mathscr{B}$ qu'eux-mêmes et la partie vide $\varnothing$. Autrement dit :

$$(\forall i \in [\![1, n]\!]) \ (\forall A \in \mathscr{B}) \quad A \subset B_i \Rightarrow A = B_i \text{ ou } A = \varnothing$$

Alors les B_i constituent une partition de Ω, et $\mathscr{B}$ est la tribu engendrée par cette partition. Remarquons que, si ω est un élément quelconque de Ω, l'atome contenant ω peut s'écrire :

$$\bigcap_{A \in \mathscr{B},\ \omega \in A} A$$

Définition 2.3 *Soit X une variable aléatoire. Les événements de la forme $X = k$ constituent une partition de Ω et donc les atomes d'une tribu $\sigma(X)$ appelée* tribu engendrée par X. *On a :*

$$\sigma(X) = \{X \in \Gamma \mid \Gamma \subset X(\Omega)\}$$

Définition 2.4 *Soit $\mathscr{B}$ une tribu. Une variable aléatoire X est dite $\mathscr{B}$-mesurable si*

$$(\forall \Gamma \subset X(\Omega)) \quad (X \in \Gamma) \in \mathscr{B}$$

Remarques

- Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux tribus finies, dire que $\mathscr{B}$ est plus fine que $\mathscr{A}$ revient à dire que les atomes de $\mathscr{A}$ sont des réunions d'atomes de $\mathscr{B}$.
- Dire que X est $\mathscr{B}$-mesurable revient à dire que cette variable est constante sur les atomes de $\mathscr{B}$.
- Si $X_1, X_2, ..., X_{n-1}, X_n$ est une famille de variables aléatoires, le $(n-1)$-uplet $(X_1, X_2, ..., X_{n-1})$ et le n-uplet $(X_1, X_2, ..., X_{n-1}, X_n)$ sont aussi des variables aléatoires, et la tribu engendrée par l'un est plus fine que celle engendrée par l'autre :

$$\sigma(X_1, X_2, ..., X_{n-1}) \subset \sigma(X_1, X_2, ..., X_{n-1}, X_n)$$

- $\sigma(X)$ est la tribu la moins fine pour laquelle X soit mesurable.
- Les variables $\sigma(X)$-mesurables ne sont autres que les fonctions déterministes de X.

Définition 2.5 (espérance conditionnelle sachant $\mathscr{B}$) *Soit $\mathscr{B}$ une tribu finie d'atomes $B_1, B_2, ..., B_n$. Soit X une variable aléatoire. L'espérance conditionnelle de X sachant $\mathscr{B}$ est la variable aléatoire $\mathscr{B}$-mesurable suivante :*

$$\mathrm{E}(X \mid \mathscr{B}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{E}(X \mathbb{1}_{B_i})}{p(B_i)} \mathbb{1}_{B_i}$$

Remarque Si X et ξ sont deux variables aléatoires, on a $\mathrm{E}(X \mid \sigma(\xi)) = \mathrm{E}(X \mid \xi)$: ainsi, l'espérance conditionnelle sachant une variable ne dépend pas vraiment des *valeurs* de cette variable, mais seulement de la tribu qu'elle engendre. C'est bien en cela que réside l'intérêt de travailler avec des tribus. On pourrait aussi définir une sorte de « mesure de probabilité conditionnelle sachant $\mathscr{B}$ », notée $p(... \mid \mathscr{B})$. On pourrait alors montrer que les éléments de la tribu sont précisément les événements A tels que $p(A \mid \mathscr{B}) = 0$ ou 1. Autrement dit, les éléments d'une tribu sont les événements que l'on juge être entièrement déterminés « sachant cette tribu » : réalisés, de probabilité conditionnelle égale à 1, ou bien au contraire, impossibles, de probabilité conditionnelle nulle.

Proposition 2.1 *L'espérance conditionnelle sachant $\mathscr{B}$ vérifie les propriétés suivantes :*

(i) Si X est $\mathscr{B}$-mesurable, alors $\mathrm{E}(X \mid \mathscr{B}) = X$.

(ii) $\mathrm{E}(\mathrm{E}(X \mid \mathscr{B})) = \mathrm{E}(X)$.

(iii) *Pour toute variable aléatoire Z $\mathscr{B}$-mesurable, on a* $\mathrm{E}(Z\mathrm{E}(X \mid \mathscr{B})) = \mathrm{E}(ZX)$.

(iv) *Linéarité :* $\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y \mid \mathscr{B}) = \lambda \mathrm{E}(X \mid \mathscr{B}) + \mu \mathrm{E}(Y \mid \mathscr{B})$.

(v) *Positivité : si $X \geq 0$, alors* $\mathrm{E}(X \mid \mathscr{B}) \geq 0$ *(et alors l'égalité entraîne que X est identiquement nulle).*

(vi) *Si $\mathscr{B}$ est plus fine que $\mathscr{A}$, alors* $\mathrm{E}(\mathrm{E}(X \mid \mathscr{B}) \mid \mathscr{A}) = \mathrm{E}(X \mid \mathscr{A})$.

(vii) *Si Z est $\mathscr{B}$-mesurable, alors* $\mathrm{E}(ZX \mid \mathscr{B}) = Z\mathrm{E}(X\mathscr{B})$.

(viii) *Si X est indépendante*[1] *de $\mathscr{B}$, alors* $\mathrm{E}(X \mid \mathscr{B}) = \mathrm{E}(X)$.

(ix) *Une variable aléatoire réelle X est indépendante de la tribu $\mathscr{B}$ si et seulement si :*

$$(\forall u \in \mathbb{R}) \quad \mathrm{E}(e^{iuX} \mid \mathscr{B}) = \mathrm{E}(e^{iuX})$$

(on rappelle que le membre de droite est la fonction caractéristique *de X, elle caractérise la loi de X – c'est en quelque sorte la transformée de Fourier de la loi de X)*

(x) $\mathrm{E}(X \mid \mathscr{B})$ *est l'*unique *variable aléatoire Y $\mathscr{B}$-mesurable vérifiant la propriété suivante :*

$$(\forall B \in \mathscr{B}) \quad \mathrm{E}(X\mathbb{1}_B) = \mathrm{E}(Y\mathbb{1}_B)$$

(xi) *Soit Z une variable aléatoire $\mathscr{B}$-mesurable à valeurs dans un ensemble F. Soit X une variable quelconque à valeurs dans un ensemble E. Soit $H : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables ; alors $H(X, Z)$ est une variable aléatoire. Notons*

$$\begin{array}{rccc} K : & \Omega \times F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\omega, z) & \longmapsto & \mathrm{E}(H(X,z) \mid \mathscr{B})(\omega) \end{array}$$

Alors, $(\forall \omega \in \Omega) \quad \mathrm{E}(H(X, Z) \mid \mathscr{B})(\omega) = K(\omega, Z(\omega))$.

---

1. On dira qu'une variable X est indépendante d'une tribu $\mathscr{B}$ quand chaque événement de la forme $X = k$ est indépendant de chaque événement de $\mathscr{B}$.

3 Propriété de Markov

Définition 3.1 (chaîne de Markov) *Soit E un ensemble fini de cardinal N appelé* espace d'états*, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans E. Pour tout n, on note $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1,...,X_n)$. Ces tribus sont de plus en plus fines, et on appelle $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la* filtration naturelle associée à la suite (X_n)*. On dit que la suite (X_n) vérifie la* propriété de Markov*, ou qu'elle est une* chaîne de Markov*, lorsque, pour toute fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, on a*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \mathrm{E}(f(X_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n) = \mathrm{E}(f(X_{n+1}) \mid X_n)$$

Quand la suite (X_n) représente un processus aléatoire et que l'entier n représente une date, la propriété de Markov signifie que « le futur ne dépend du passé qu'à travers le présent ».

Remarque Posons $f = \mathbb{1}_{\{j\}}$. Les valeurs de l'espérance conditionnelle $\mathrm{E}(\mathbb{1}_{\{j\}}(X_{n+1}) \mid X_n)$ sur les atomes de la tribu $\sigma(X_n)$ sont les probabilités conditionnelles $p(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$. Il est alors facile de voir que la propriété de Markov est équivalente à la propriété suivante :

$$(\forall i_0, i_1, ..., i_{n-1}, i, j \in E) \quad p(X_{n+1} = j \mid (X_0 = i_0) \cap ... \cap (X_{n-1} = i_{n-1}) \cap (X_n = i)) = p(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

Définition 3.2 (matrice stochastique) *Soit (X_n) une chaîne de Markov. Si les probabilités conditionnelles $p(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ ne dépendent pas de n, on dit que c'est une* chaîne de Markov homogène*. On lui associe alors une matrice carrée M dite* matrice stochastique *dont les coefficients sont :*

$$M_{i,j} = p(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

Il est aussi commode de représenter ces probabilités conditionnelles sur les arêtes d'un graphe orienté dont les nœuds sont les éléments de E.

Exemples Voir les exercices (problème des deux urnes, téléphone arabe, fortune du joueur).

Probabilité invariante Il est commode de représenter toute fonction $\mu : E \to \mathbb{R}$ par un vecteur-ligne dans $\mathbb{R}^N$:

$$(\mu(k))_{k\in E}$$

En particulier, notons μ_n la loi de probabilité de X_n, on assimile donc μ_n au vecteur-ligne suivant :

$$(p(X_n = k))_{k\in E}$$

On a alors (vérifiez-le) :

$$\mu_{n+1} = \mu_n M$$

Question intéressante : la suite de vecteurs $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Remarquons que, si tel est le cas, alors sa limite μ_∞ doit être une « loi de probabilité invariante » au sens où :

$$\mu_\infty = \mu_\infty M$$

La question de la convergence des chaînes de Markov est donc étroitement liée à celle de l'existence de probabilités invariantes. J'énoncerai ci-dessous trois théorèmes répondant à ces questions, sans les démontrer.

Théorème 3.1 *Pour toute chaîne de Markov homogène de matrice stochastique M, il existe des lois de probabilités invariantes :*

$$(\exists \mu_\infty \in \mathbb{R}^N) \quad \mu_\infty = \mu_\infty M, \quad \sum_k \mu_\infty(k) = 1 \ \text{ et } (\forall k) \ \mu_\infty(k) \geq 0$$

Définition 3.3 *On dit qu'une chaîne de Markov est* irréductible *si tous les états communiquent, au sens où :*

$$(\forall i, j \in E) \ (\exists n \in \mathbb{N}) \quad p(X_n = j \mid X_0 = i) > 0$$

Théorème 3.2 *Pour toute chaîne de Markov homogène irréductible, il existe une* unique *loi de probabilité invariante* μ_∞*. De plus,* $(\forall k)\ \mu_\infty(k) > 0$*.*

Définition 3.4 *On montre facilement que toute valeur propre d'une matrice stochastique M est de module inférieur ou égal à 1. Si 1 est l'unique valeur propre de M de module 1, on dit que M est* apériodique.

Théorème 3.3 *Pour toute chaîne de Markov homogène irréductible apériodique, la loi de X_n converge vers l'unique loi de probabilité invariante μ_∞.*

Classification des états d'une chaîne de Markov Soit $y \in E$ un état. Quelque soit l'état d'une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au temps 0, on peut s'intéresser au « premier temps de retour en y », c'est-à-dire à la variable aléatoire T_y définie par :

$$T_y = \inf\{n \geq 1 \mid X_n = y\}$$

Quand $(\forall n \geq 1)\ X_n \neq y$, on notera $T_y = \infty$.

Soit un état $x \in E$, notons

$$\rho_{xy} = p(T_y < \infty \mid X_0 = x)$$

On dira que l'état y est *récurrent* si $\rho_{yy} = 1$; sinon, on dira qu'il est *transitoire*. Il y a toujours au moins un état récurrent. Tous les états d'une chaîne irréductible sont récurrents.

Soit $C \subset E$ un ensemble d'états récurrents. On dira que C est *clos* s'il est impossible d'en sortir, au sens où $(\forall x \in C)\ (\forall y \notin C) \quad \rho_{xy} = 0$.

Il est alors possible de décomposer E en un réunion disjointe

$$E = E_T \cup C_1 \cup \ldots \cup C_p$$

où E_T est l'ensemble des états transitoires, et les C_i sont des ensembles clos irréductibles.

4 Marchés financiers

Définition 4.1 *Un* marché financier *est un espace de probabilité* $(\Omega, \mathscr{A}, p)$ *muni d'une filtration croissante* $(\mathscr{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ *(une suite de tribus de plus en plus fines), et d'une suite de vecteurs aléatoires*

$$S_n = \begin{pmatrix} S_n^0 \\ S_n^1 \\ \vdots \\ S_n^d \end{pmatrix}$$

à valeurs dans $(\mathbb{R}_+^\star)^{d+1}$*, adaptée à la filtration, chaque variable aléatoire* S_n^i *étant* $\mathscr{F}_n$*-mesurable et représentant le prix de l'actif* i*-ème du marché à la date* n*. L'actif 0-ème* (S_n^0) *est un* actif sans risque*, c'est-à-dire un placement sur un compte en banque au taux d'intérêt* r*, et* $S_0^0 = 1$.

La valeur de la monnaie change au cours du temps, et pour comparer des prix à des instants différents on *actualise* les valeurs : pour posséder 1 € à la date n, il faut placer $\dfrac{1}{(1+r)^n}$ € à la date 0 sur un compte épargne au taux d'intérêt r. Dans la suite, on notera ce coefficient d'actualisation

$$\beta_n = \frac{1}{(1+r)^n}$$

Pour comparer les prix des actifs, on les exprime selon la valeur de la monnaie à la date 0. Le prix actualisé du i-ème actif sera alors noté :

$$\tilde{S}_n^i = \beta_n S_n^i$$

Définition 4.2 *Une* stratégie de gestion de portefeuille ϕ *est une suite* prévisible *de vecteurs aléatoires*

$$\phi_n = \begin{pmatrix} \phi_n^0 \\ \phi_n^1 \\ \vdots \\ \phi_n^d \end{pmatrix}$$

à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$*, c'est-à-dire telle que pour tout* n*, les* ϕ_n^i *sont des variables aléatoires* $\mathscr{F}^{n-1}$*-mesurables.*

Peu importe la valeur de ϕ_0, on pose par convention $\phi_0 = \phi_1$. La valeur du portefeuille à la date n est

$$V_n(\phi) = \sum_{i=0}^{d} \phi_n^i S_n^i = \langle \phi_n, S_n \rangle$$

Le fait que (ϕ_n) soit une suite *prévisible* signifie qu'à la date n, vous réorganisez votre portefeuille de composition ϕ_n en achetant et en revendant des actifs aux cours S_n, et vous décidez ainsi de la composition ϕ_{n+1} de votre portefeuille *au vu des cours passés et présents jusqu'à la date* n *incluse.* Puis le cours des actifs évolue et devient S_{n+1} à la date $(n+1)$. On a :

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \big(\langle \phi_{n+1}, S_{n+1}\rangle - \langle \phi_{n+1}, S_n\rangle\big) + \big(\langle \phi_{n+1}, S_n\rangle - \langle \phi_n, S_n\rangle\big)$$

c'est-à-dire

$$\Delta V_{n+1}(\phi) = \langle \phi_{n+1}, \Delta S_{n+1}\rangle + \langle \Delta\phi_{n+1}, S_n\rangle \qquad (1)$$

Le terme de gauche de cette somme est la variation de la valeur du portefeuille due à la variation des cours des actifs à la date $(n+1)$, le terme de droite est la variation de la valeur du portefeuille due aux ventes, achats, apports extérieurs et consommation que vous effectuez à la date n, au cours S_n. Notez qu'on autorise $\phi_n^i < 0$: pour l'actif sans risque, cela signifie un emprunt au taux sans risque r, et pour les actifs risqués, cela signifie une *vente à découvert*.

Définition 4.3 *Une stratégie* autofinancée *est une stratégie ϕ telle que $\langle \phi_{n+1}, S_n \rangle - \langle \phi_n, S_n \rangle = 0$ pour tout n.*

Autrement dit, dans une stratégie autofinancée, apports extérieurs et consommation sont interdits. Le terme de droite s'annule alors dans l'équation 1, et on a :

$$V_n(\phi) = \langle \phi_0, S_0 \rangle + \sum_{k=1}^{n} \langle \phi_k, \Delta S_k \rangle$$

Les valeurs actualisées vérifient une équation analogue à l'équation 1 :

$$\Delta \tilde{V}_{n+1}(\phi) = \langle \phi_{n+1}, \Delta \tilde{S}_{n+1} \rangle + \langle \Delta \phi_{n+1}, \tilde{S}_n \rangle \tag{2}$$

où il faut bien noter que $\Delta \tilde{S}_{n+1} = \beta_{n+1} S_{n+1} - \beta_n S_n$. Dans le cas d'une stratégie autofinancée, on a donc aussi

$$\tilde{V}_n(\phi) = \langle \phi_0, S_0 \rangle + \sum_{k=1}^{n} \langle \phi_k, \Delta \tilde{S}_k \rangle$$

mais la valeur actuelle de l'actif sans risque est constante, $\Delta \tilde{S}_k^0 = 0$ pour tout k ; on peut donc récrire l'équation plus simplement :

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{k=1}^{n} \phi_k^1 \Delta \tilde{S}_k^1 + \ldots + \phi_k^d \Delta \tilde{S}_k^d$$

où l'on voit qu'une stratégie autofinancée est entièrement déterminée par la donnée de $V_0(\phi) \in \mathbb{R}$ et des N vecteurs aléatoires suivants, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{pmatrix} \phi_n^1 \\ \vdots \\ \phi_n^d \end{pmatrix}$$

On voit d'autre part que l'ensemble des $\tilde{V}_N(\phi)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des variables aléatoires définies sur Ω.

Définition 4.4 *Une stratégie autofinancée ϕ est dite* admissible *si $V_n(\phi) \geq 0$ pour tout n.*

Définition 4.5 *Une stratégie admissible ϕ est un* arbitrage *si $V_0(\phi) = 0$ et $p(V_N(\phi) > 0) > 0$.*

Autrement dit, un arbitrage est une stratégie qui n'entraîne aucune perte (vous êtes sûr de toujours pouvoir liquider votre portefeuille sans perte) et qui présente des gains à la date N avec probabilité non nulle.

Définition 4.6 *Un* marché viable *est un marché financier où n'existe pas de stratégie d'arbitrage.*

Dans la pratique, un marché qui n'est pas viable tend à le devenir à cause de la loi de l'offre et de la demande : si le cours d'un actif est très bas, c'est-à-dire si l'on peut s'attendre, en l'achetant, à faire des profits à coup sûr sans prendre de risque, tout le monde va le faire, donc son cours va augmenter beaucoup et la situation ne durera pas...

5 Martingales et viabilité des marchés

Définition 5.1 *Soit* $(\mathscr{F}_n)_{0\le n\le N}$ *une filtration croissante et* (X_n) *une suite adaptée de variables aléatoires à valeurs réelles.*

- *si* $(\forall n)$ $\mathrm{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = X_n$, *on dit que* (X_n) *est une* $\mathscr{F}_n$-martingale
- *si* $(\forall n)$ $\mathrm{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \ge X_n$, *on dit que* (X_n) *est une* $\mathscr{F}_n$-sous-martingale
- *si* $(\forall n)$ $\mathrm{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \le X_n$, *on dit que* (X_n) *est une* $\mathscr{F}_n$-sur-martingale

Remarquez que ces trois conditions dépendent simplement du signe de

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) - X_n &= \mathrm{E}(X_{n+1} - X_n \mid \mathscr{F}_n) \\ &= \mathrm{E}(\Delta X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)\end{aligned}$$

Proposition 5.1 *(i) La suite adaptée* (X_n) *est une* $\mathscr{F}_n$*-martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale) si et seulement si*

$$(\forall n \in [\![0, N]\!])\ (\forall m \ge n) \quad \mathrm{E}(X_m \mid \mathscr{F}_n) = X_n \ (\textit{resp.}\ \ge X_n, \le X_n)$$

(ii) Une combinaison linéaire de martingales est une martingale. Une combinaison linéaire à coefficients positifs de sous-martingales (resp. sur-martingales) est une sous-martingale (resp. sur-martingale).

(iii) La suite (X_n) *est une sous-martingale si et seulement si* $(-X_n)$ *est une sur-martingale.*

(iv) Soit ϕ *une fonction convexe et* (X_n) *une martingale, alors* $\phi(X_n)$ *est une sous-martingale.*

(v) Si (X_n) *est une martingale, on a* $\mathrm{E}(X_N) = \mathrm{E}(X_0)$.

Définition 5.2 *Soit* (X_n) *une suite adaptée à* $(\mathscr{F}_n)$ *et* (U_n) *une suite prévisible. La* transformée de (X_n) par (U_n) *est la suite notée* $(U * X)_n$ *et définie par :*

$$(U * X)_n = U_0 X_0 + \sum_{k=1}^{n} U_k \Delta X_k$$

Autrement dit, $\Delta(U * X)_n = U_n \Delta X_n$.

Toute cette théorie s'étend aux dimensions supérieures. Par exemple, la suite de vecteurs aléatoires (S_n) à valeurs dans $(\mathscr{R}_+^\star)^{d+1}$ vue dans la section précédente est une martingale si chaque composante S_n^i est une martingale. Si (ϕ_n) est une suite prévisible de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathscr{R}^{d+1}$, la *transformée* de la suite (S_n) par la suite (ϕ_n) est définie au moyen du produit scalaire :

$$\Delta(\phi * S)_n = \langle \phi_n, \Delta S_n \rangle$$

On a donc :

$$V_n(\phi) = (\phi * S)_n$$

Théorème 5.1 *Si* (X_n) *une martingale et* (U_n) *une suite prévisible, alors* $(U * X)_n$ *est une martingale. Si* (X_n) *est une sous-martingale (resp. sur-martingale) et* (U_n) *une suite prévisible à valeurs positives, alors* $(U * X)_n$ *est une sous-martingale (resp. sur-martingale).*

Théorème 5.2 *Réciproquement, soit* (X_n) *une suite adaptée telle que pour tout suite prévisible* (U_n) *on ait* $\mathrm{E}((U * X)_N) = \mathrm{E}(U_0 X_0)$, *alors* (X_n) *est une martingale.*

Théorème 5.3 *Un marché financier est viable si et seulement s'il existe une mesure de probabilité* p^* *(dite* probabilité risque neutre*) équivalente*[2] *à* p *et sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.*

2. c'est-à-dire que, comme p, la mesure p^* vérifie $(\forall \omega)$ $p^*(\{\omega\}) > 0$.

Remarques

– Le fait que l'existence d'une probabilité risque neutre implique la viabilité du marché est une conséquence assez évidente des définitions et du théorème 5.1. En effet, supposons que $(\tilde{S}_n^{(d)})$ est une martingale, et soit ϕ une stratégie autofinancée telle que $V_0(\phi) = 0$ et $V_N(\phi) \geq 0$. Alors $\tilde{V}_n(\phi) = (\phi * \tilde{S})_n$ est une martingale donc $\mathrm{E}(\tilde{V}_N(\phi)) = V_0(\phi) = 0$, et ceci implique (positivité de l'espérance) que $V_N(\phi)$ est identiquement nulle. La réciproque (*cf.* [7] pp. 18-19) est beaucoup plus subtile et repose sur le théorème de Hahn-Banach.
– On a vu que la viabilité des marchés était une hypothèse assez naturelle, renforcée par la loi de l'offre et de la demande. Sous cette hypothèse, et sous une certaine mesure de probabilité, les prix actualisés des actifs sont donc des martingales ; le théorème 5.1 implique qu'alors la valeur actualisée de tout portefeuille est elle-même une martingale. Ceci ne réjouira guère le spéculateur qui souhaiterait au contraire avoir une sous-martingale (c'est-à-dire des espérances futures supérieures à la valeur présente du portefeuille). On comprend là pourquoi les marchés financiers organisés pratiquent les arbitrages : en cas de dérive, l'auto-régulation de l'offre et de la demande permet alors le retour à la viabilité et donc l'impossibilité des stratégies d'arbitrages et de la spéculation.

6 Couverture et marchés complets

Soit un marché financier constitué d'un actif sans risque S_n^0 et d'un actif risqué S_n.

Définition 6.1 *Une* option européenne *est une variable aléatoire positive $\mathscr{F}_N$-mesurable h.*

Autrement dit, on s'intéresse à une option européenne, dont la date d'échéance est égale à l'horizon N du marché, et sa valeur à cette date est h. Tout le problème est alors d'estimer le prix d'une telle option à la date 0.

Exemples Le *call européen* sur le sous-jacent S_n, de prix d'exercice K et d'échéance N est la variable $h = (S_N - K)_+ = \max(0, S_N - K)$. Cette option donne le droit à son possesseur d'acheter l'actif S_n à l'échéance au prix K. Elle n'aura de valeur que si $S_N > K$, et sa valeur est alors $(S_N - K)$: il achète l'actif S_N au prix K, quitte à le revendre immédiatement au prix S_N en empochant la différence $(S_N - K)$.

Le *put européen* sur le sous-jacent S_n, de prix d'exercice K et d'échéance N est la variable $h = (K - S_N)_+$.

Un *put européen asiatique* sur le sous-jacent S_n, de prix d'exercice K et d'échéance N est une variable aléatoire de la forme $h = (K - U)_+$ où

$$U = \frac{\sum_{k \in I} S_k}{\operatorname{card} I}$$

avec $I \subset [\![0, N]\!]$.

En pratique Les options sont des instruments de couverture du risque de variation du cours de l'actif sous-jacent S_n (voir exemple étudié au début de l'année). Si, à la date 0, quelqu'un me vend une option h, il s'engage alors à me fournir la somme h à l'échéance (date N). À charge à ce vendeur de constituer un portefeuille qui, à l'échéance, lui permettra de me payer. On appelle cela un « portefeuille de couverture » ou une « stratégie de réplication ». Plus précisément :

Définition 6.2 *Une* stratégie de réplication *est une stratégie ϕ admissible telle que $V_N(\phi) = h$.*

Remarque Si le marché est viable, l'existence d'une stratégie ϕ *autofinancée* telle que $V_N(\phi) = h$ entraîne son admissibilité.

Proposition 6.1 *Soit h une option réplicable par une stratégie ϕ dans un marché viable. Alors si l'on adjoint au marché un nouvel actif $H_n = V_n(\phi)$, le marché reste viable. On dit que H_n est un « prix excluant l'arbitrage ».*

Autrement dit, pour que le vendeur de l'option puisse constituer son portefeuille de couverture à la date 0, il aura tout intérêt à vendre son option h à un prix $\geq V_0(\phi)$. Les arbitrages et la loi de l'offre et de la demande feront même tendre ce prix vers $V_0(\phi)$.

Démonstration. Sous p^*, la suite $(\tilde{V}_n(\phi))_n$ est une martingale car c'est une transformée de martingales...

Remarque Soit h une option réplicable par une stratégie ϕ dans un marché viable, alors son prix excluant l'arbitrage est, à la date n :

$$V_n(\phi) = \beta_{N-n}\mathrm{E}^*(h \mid \mathscr{F}_N)$$

Ce prix ne dépend donc ni de la stratégie de couverture ϕ, ni de la tendance du marché (puisque l'espérance E^* est calculée sous la probabilité p^* sous laquelle les cours des actifs sont, en moyenne, constants). Il y a là un paradoxe. S'il est davantage probable que le cours de l'actif croisse, alors j'ai l'impression de devoir vendre mes calls plus chers ; mais en réalité il n'en est rien, car je me couvre contre la hausse justement en achetant de cet actif, ce qui compense le désavantage que je risque de subir...

Encore faut-il qu'il existe une stratégie de réplication !

Définition 6.3 *Un marché est dit* complet *si toute option européenne est réplicable.*

Théorème 6.1 *Un marché viable est complet si et seulement s'il existe une* unique *probabilité risque neutre p^* sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.*

Démonstration : pour l'instant, on se contentera de montrer la seconde implication ($\Rightarrow$). Soit une quelconque variable aléatoire réelle positive h, et ϕ sa couverture. Soit p^* et p^{**} deux probabilités risque neutre. Sous chacune, $(\tilde{S}^n)$ est une martingale, et on a donc :

$$V_0(\phi) = \beta_N\mathrm{E}^*(h) = \beta_N\mathrm{E}^{**}(h)$$

Toutes les variables aléatoires réelles positives ont donc même espérance sous p^* et sous p^{**}. Ceci implique que ces deux mesures de probabilités sont égales.

Quelques arbitrages Soit h une option réplicable, vendue à un prix $H_0 > V_0(\phi)$. Voici une stratégie d'arbitrage. Je « simule » une telle option en me constituant un tel portefeuille ϕ, cela me coûte $V_0(\phi)$ à la date 0. Je peux alors vendre cette option, et je la vends au prix du marché, c'est-à-dire H_0. J'empoche la différence $H_0 - V_0(\phi)$ que je place sur un compte épargne au taux sans risque. À l'échéance, soit mon acheteur exerce l'option et je suis tenu de lui donner $h = V_N(\phi)$ (c'est facile, il me suffit de revendre mon portefeuille), soit il n'exerce pas parce que $h = V_N(\phi) = 0$. Dans les deux cas, j'ai bien gagné $\beta_N(H_0 - V_0(\phi))$; il s'agit donc d'un arbitrage.

Soit h une option réplicable, vendue à un prix $H_0 < V_0(\phi)$. Voici une stratégie d'arbitrage. J'achète immédiatement une telle option. Pour ce faire, je « vends à découvert » les actifs constituant la stratégie de réplication ϕ, au prix $V_0(\phi)$. J'empoche la différence $(V_0(\phi) - H_0)$ que je place sur un compte épargne. À l'échéance, soit j'exerce mon option et je touche $h = V_N(\phi)$, ce qui me permet d'honorer mes emprunts et ventes à découvert, soit $h = V_N(\phi) = 0$ et je suis quitte de toute dette. Dans les deux cas, j'ai bien gagné $\beta_N(H_0 - V_0(\phi))$; il s'agit donc d'un arbitrage.

Même sans connaître de stratégie de réplication, il y a une relation entre call, put et actif sous-jacent qui peut donner lieu à des arbitrages : c'est la *relation de parité call-put*

$$P + S_0 = \beta_N K + C$$

où C et P sont les prix respectifs (à la date 0) d'un call et d'un put européens de sous-jacent S_n, d'échéance N et de prix d'exercice K. Supposons par exemple $P + S_0 > \beta_N K + C$. Voici un arbitrage. Je simule un put en vendant à découvert un actif risqué S_0 et en achetant un call. Je vends ce put au prix du marché, c'est-à-dire P. J'empoche la différence $P + S_0 - C > \beta_N K$, et je place cette somme sur un compte épargne. J'attends l'échéance. Si $S_N > K$, j'exerce mon call et j'achète au prix K l'actif que je dois (puisque je l'ai vendu à découvert) ; il restera donc $\left(\frac{P+S_0-C}{\beta_N}-K\right)$ sur mon compte épargne. Si au contraire $S_N < K$, j'achèterai l'actif que je dois au prix S_N, et je devrais encore honorer mon contrat avec l'acheteur du put en lui donnant $(K-S_N)$. Là aussi, il restera $\left(\frac{P+S_0-C}{\beta_N}-K\right)$ sur mon compte épargne ; il s'agit donc d'un arbitrage.

7 Cox-Ross-Rubinstein

Soit un marché financier constitué d'un actif sans risque au taux r et d'un actif risqué (S_n) défini par :

$$\begin{cases} S_0 = s_0 \\ S_{n+1} = T_{n+1} S_n \end{cases}$$

où les T_n sont des variables aléatoires à deux valeurs $(1+a) < (1+b)$, pas forcément indépendantes ni équidistribuées (quand elles le sont, (S_n) est une chaîne de Markov homogène et $(\ln S_n)$ une *marche aléatoire*).

$$(\forall n \in [\![1, N]\!]) \quad T_n \in \{1+a, 1+b\}$$

$$\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$$

$(\mathscr{F}_n)$ est la filtration naturelle engendrée par la suite (T_n) :

$$\begin{cases} \mathscr{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\} \\ \mathscr{F}_n = \sigma(T_1, T_2, \dots, T_n) \end{cases}$$

Proposition 7.1 *Si $r \notin]a, b[$, alors il existe un arbitrage.*

Démonstration. Supposons par exemple que $r \geq b$. Alors je vends à découvert un actif à la date 0 :

$$\phi_0 = -1, \quad \phi_0^0 = s_0$$

Puis j'attends la date N sans rien faire.

$$V_N(\phi) = s_0(1+r)^N - S_N \geq 0$$

et il arrive même, avec probabilité non nulle, que $V_N(\phi) > 0$. En effet,

$$S_N = s_0 T_1 T_2 \dots T_N \leq s_0(1+b)^N \leq s_0(1+r)^N;$$

l'égalité implique que tous les T_n valent $(1+b)$, mais il doit arriver, avec probabilité non nulle, que certains des T_n vaillent $(1+a)$, car $(\forall \omega)\ \ p(\{\omega\}) > 0$.

Autre démonstration. Supposons qu'il n'existe pas d'arbitrage, alors d'après le théorème 5.3, il existe une probabilité p^* sous laquelle $(\tilde{S}_n)$ est une martingale, donc :

$$\frac{1}{1+r} S_n \mathrm{E}^*(T_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = S_n$$

c'est-à-dire :

$$(1+a)p^*(T_{n+1} = 1+a \mid \mathscr{F}_n) + (1+b)p^*(T_{n+1} = 1+b \mid \mathscr{F}_n) = 1+r \tag{3}$$

On a alors $1+a < 1+r < 1+b$.

Existence d'une probabilité p^* dans Cox-Ross-Rubinstein Il suffit de trouver une mesure de probabilité vérifiant l'équation (3) ci-dessus. Autrement dit, le couple $(p^*(T_{n+1} = 1+a \mid \mathscr{F}_n), p^*(T_{n+1} = 1+b \mid \mathscr{F}_n))$ doit être solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (1+a)x + (1+b)y = (1+r) \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Ce système a une unique solution donnée par les formules de Cramer. Il faut donc que :

$$p^*(T_{n+1} = 1 + a \mid \mathscr{F}_n) = \frac{\begin{vmatrix} r & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{b - r}{b - a}$$

$$p^*(T_{n+1} = 1 + b \mid \mathscr{F}_n) = \frac{\begin{vmatrix} a & r \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{r - a}{b - a}$$

Quand $r \in]a, b[$, ces deux nombres tombent dans l'intervalle $[0, 1]$, et cela définit entièrement la probabilité p^*. En particulier, on voit que la loi de (T_n) sous p^* est la même pour tout n, et que T_{n+1} est indépendante de $\mathscr{F}_n$: la suite (S_n) est donc une chaîne de Markov homogène. Dans ces conditions, le modèle de Cox-Ross-Rubinstein définit un marché viable.

Couverture effective ϕ d'une option européenne h À la date n, notons H_n le prix de h excluant l'arbitrage. On va déterminer les H_n, ϕ_n^0, ϕ_n par induction descendante en partant de l'échéance $n = N$ de l'option. Il est commode de représenter Ω par un arbre binaire : les différents chemins menant de la racine à un nœud de niveau n représentent alors les différents atomes de $\mathscr{F}_n$. Considérons un atome de $\mathscr{F}_{n-1}$. À la date suivante, cet atome se scinde en deux atomes de $\mathscr{F}_n$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
 & \left\{\begin{array}{l} S_n = (1+b)s \\ H_n = c_+ \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} S_{n-1} = s \\ H_{n-1} = c \\ \phi_n^0 = x \\ \phi_n = y \end{array}\right. \arrow[ur, dash, "\frac{r-a}{b-a}"] \arrow[dr, dash, "\frac{b-r}{b-a}"'] & \\
 & \left\{\begin{array}{l} S_n = (1+a)s \\ H_n = c_- \end{array}\right.
\end{tikzcd}$$

Le fait qu'aux dates $(n-1)$ et n, le portefeuille ϕ couvre l'option h s'exprime par les trois équations linéaires suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} (1+r)^{n-1}x + sy = c \\ (1+r)^n x + (1+b)sy = c_+ \\ (1+r)^n x + (1+a)sy = c_- \end{array}\right.$$

Les deux dernières suffisent à déterminer y :

$$y = \frac{c_+ - c_-}{(1+b)s - (1+a)s}$$

Ce quotient est souvent appelé *ratio de couverture.*

On peut aussi exprimer y comme solution des deux premières équations et l'écrire alors sous la forme

$$y = \frac{\beta_n c_+ - \beta_{n-1} c}{\beta_n (1+b)s - \beta_{n-1} s}$$

Enfin, la première et la dernière équations donnent :

$$y = \frac{\beta_n c_- - \beta_{n-1} c}{\beta_n (1+a)s - \beta_{n-1} s}$$

On a donc en tout cas

$$\phi_n = \frac{\tilde{H}_n - \tilde{H}_{n-1}}{\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1}} = \frac{\Delta \tilde{H}_n}{\Delta \tilde{S}_n},$$

autre forme du ratio de couverture qui fait beaucoup penser à un quotient différentiel.

Formule explicite de prix d'un call européen sous Cox-Ross-Rubinstein Le prix excluant l'arbitrage à la date n est :

$$\begin{aligned}
H_n &= \beta_{N-n} \mathrm{E}^* \left((S_N - K)_+ \mid \mathscr{F}_n \right) \\
&= \beta_{N-n} \mathrm{E}^* \left((S_n T_{n+1} T_{n+2} \dots T_N - K)_+ \mid \mathscr{F}_n \right) \\
&= \beta_{N-n} \sum_{k=0}^{N-n} \left((S_n (1+a)^k (1+b)^{N-n-k} - K)_+ \times C_{N-n}^k \left(\frac{b-r}{b-a} \right)^k \left(\frac{r-a}{b-a} \right)^{N-n-k} \right)
\end{aligned}$$

8 Enveloppe de Snell et options américaines

Définition 8.1 *Soit (Z_n) une suite adaptée à la filtration $(\mathscr{F}_n)$. L'*enveloppe de Snell *de la suite (Z_n) est la suite (U_n) définie par :*

$$\begin{aligned} U_N &= Z_N \\ U_n &= Z_n \vee \mathrm{E}(U_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \quad (0 \leq n < N) \end{aligned}$$

Proposition 8.1 *L'enveloppe de Snell (U_n) de la suite (Z_n) est la plus petite $\mathscr{F}_n$-surmartingale majorant (Z_n).*

Démonstration. Le fait que (U_n) soit une surmartingale majorant (Z_n) résulte immédiatement de sa définition. Montrons que c'est la plus petite. Soit (Y_n) une autre surmartingale majorant (Z_n). Par récurrence descendante, supposons que $Y_{n+1} \geq U_{n+1}$. Alors $Y_n \geq \mathrm{E}(Y_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \geq \mathrm{E}(U_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)$. Comme d'autre part $Y_n \geq Z_n$, on a bien

$$Y_n \geq Z_n \vee \mathrm{E}(u_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = U_n$$

Application Une *option américaine* dans un marché financier (S_n^0, S_n) est une suite Z_n adaptée. Par exemple, un *call américain* est une suite de la forme

$$Z_n = (S_n - K)_+$$

Pour tout n, Z_n est le profit que permet l'exercice de l'option à la date n : contrairement aux options européennes, on n'est pas obligé d'attendre l'échéance pour exercer une option américaine. Un raisonnement par récurrence descendante permet de calculer la valeur d'une telle option dans un marché complet. Supposons qu'elle vaille U_n à la date n. C'est le prix de la couverture de l'option à cette date. À la date $(n-1)$, si le possesseur de l'option exerce, il empoche Z_{n-1}, et le vendeur de l'option doit donc être prêt à lui payer cette somme ; mais s'il n'exerce pas, le vendeur doit avoir un portefeuille de couverture dont la valeur à la date n sera au moins égale à U_n. Un tel portefeuille, actualisé, est une martingale sous p^*, donc sa valeur à la date $(n-1)$ sera au moins

$$\mathrm{E}^*(\beta_n U_n \mid \mathscr{F}_{n-1})$$

Pour que le vendeur ne soit jamais pris à dépourvu, il faut donc que

$$U_{n-1} = Z_{n-1} \vee \frac{\mathrm{E}^*(U_n \mid \mathscr{F}_{n-1})}{1+r}$$

On a alors

$$\tilde{U}_{n-1} = \tilde{Z}_{n-1} \vee \mathrm{E}^*(\tilde{U}_n \mid \mathscr{F}_{n-1}),$$

donc $(\tilde{U}_n)$ est l'enveloppe de Snell de $(\tilde{Z}_n)$.

Remarque Le *call américain* est en fait identique au *call* européen ! On va le démontrer par récurrence. Supposons qu'ils ont même valeur pour les dates $> n$. La convexité de la fonction $\tilde{S}_N \mapsto (\tilde{S}_N - \beta_N K)_+$ entraîne l'inégalité suivante :

$$\mathrm{E}^*(\tilde{U}_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = \mathrm{E}^*(\tilde{C}_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = \mathrm{E}^*((\tilde{S}_N - \beta_N K)_+ \mid \mathscr{F}_n) \geq \left(\mathrm{E}^*(\tilde{S}_N \mid \mathscr{F}_n) - \beta_N K\right)_+ = (\tilde{S}_n - \beta_N K)_+$$

On a d'autre part $\beta_N \leq \beta_n$ donc :

$$(\tilde{S}_n - \beta_N K)_+ \geq (\tilde{S}_n - \beta_n K)_+ = \tilde{Z}_n$$

Finalement, $\mathrm{E}^*(\tilde{U}_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \geq \tilde{Z}_n$ donc $\tilde{U}_n = \mathrm{E}^*(\tilde{U}_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = \mathrm{E}^*(\tilde{C}_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = \tilde{C}_n$, ainsi les deux options ont déja même valeur à la date n, ce qu'il fallait démontrer.

Quand faut-il exercer une option américaine ? Il ne faut surtout pas exercer tant que $\tilde{Z}_n < \tilde{U}_n$. Dans le besoin, on a mieux à faire : vendre l'option à son prix U_n. Dès que $\tilde{Z}_n$ touche son enveloppe de Snell $\tilde{U}_n$, on peut exercer, mais il peut être dommageable d'attendre trop longtemps. La *décomposition de Doob* de la surmartingale $(\tilde{U}_n)$ nous permettra de déterminer la dernière date optimale d'exercice d'une option américaine.

Décomposition de Doob Dans un marché complet, la valeur actualisée d'un portefeuille de couverture d'une option américaine est une martingale. Notons-la $\tilde{M}_n$. Pour qu'un tel portefeuille suffise à couvrir l'option, il faut que $(\forall n)$ $\tilde{M}_n \geq \tilde{U}_n$. Ecrivons donc $\tilde{M}_n = \tilde{U}_n + \tilde{A}_n$, avec $\tilde{A}_n \geq 0$. Supposons connue la valeur d'un tel portefeuille jusqu'à la date n, et $\tilde{M}_0 = \tilde{U}_0$. Pour que $(\tilde{M}_n)$ soit une martingale, il faut et il suffit que

$$(\forall n) \quad \mathrm{E}^*(\tilde{M}_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = \tilde{M}_n,$$

soit

$$(\forall n) \quad \mathrm{E}^*(\tilde{A}_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = \tilde{M}_n - \mathrm{E}^*(\tilde{U}_{n+1} \mid \mathscr{F}_n).$$

Cette quantité est positive car la suite $(\tilde{U}_n)$ est une surmartingale. Il suffit donc de poser

$$\tilde{A}_{n+1} = \tilde{M}_n - \mathrm{E}^*(\tilde{U}_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)$$

$$\tilde{M}_{n+1} = \tilde{U}_{n+1} + \tilde{A}_{n+1}$$

Cette construction par récurrence des suites $(\tilde{M}_n)$ et $(\tilde{A}_n)$ s'appelle *décomposition de Doob* de la surmartingale $(\tilde{U}_n)$.

Proposition 8.2 *Dans la décomposition de Doob de la surmartingale* $(\tilde{U}_n)$*, la suite* $(\tilde{A}_n)$ *est une suite positive, prévisible et croissante.*

Démonstration. De par sa définition, $\tilde{A}_{n+1}$ est clairement $\mathscr{F}_n$-mesurable. On a vu qu'elle était positive car $(\tilde{U}_n)$ est une surmartingale. De plus

$$\tilde{A}_{n+1} - \tilde{A}_n = \mathrm{E}^*(\tilde{A}_{n+1} - \tilde{A}_n \mid \mathscr{F}_n) = \mathrm{E}^*(\tilde{M}_{n+1} - \tilde{M}_n \mid \mathscr{F}_n) - \mathrm{E}^*(\tilde{U}_{n+1} - \tilde{U}_n \mid \mathscr{F}_n)$$

et cette quantité est aussi positive, donc $(\tilde{A}_n)$ est croissante.

Dernière date optimale d'exercice Tant que $\tilde{A}_{n+1}$ est nul, on peut attendre : l'option se comporte comme la martingale $\tilde{M}_n$. En revanche, dès que $\tilde{A}_{n+1} > 0$ (et on peut le prévoir à la date n) il faut exercer ou bien vendre cette option, quitte à constituer immédiatement le portefeuille de valeur $\tilde{M}_n$ qui majorera toutes les valeurs ultérieures de l'option.

Exemple On considère un *put américain* de prix d'exercice $K = 100$, d'échéance $N = 3$, sur un actif sous-jacent obéissant au modèle de Cox-Ross-Rubinstein avec $S_0 = 100$, $a = -6$ %, $b = 12$ %, et le taux sans risque $r = 3$ %. Outre Z_n, U_n, A_n, on calculera la quantité d'actif sous-jacent ϕ_n entrant dans la composition du portefeuille de couverture de valeur M_n (par la méthode du *ratio de couverture*). Enfin, on calculera aussi la valeur du *put* européen de mêmes paramètres pour comparer ces deux options. *Attention :* pour les options européennes, on pouvait représenter Ω par un « arbre binaire recombinant », mais non pour les options américaines (car les suites A_n, M_n ne sont pas construites par récurrence descendante) et la complexité des algorithmes s'en ressent.

- $\begin{cases} S_0 = 100 \\ P_0 = 2,29 \\ Z_0 = 0,\ U_0 = 3,03 \\ A_1 = 0,\ \phi_1 = -0,32 \end{cases}$
  - $\begin{cases} S_1 = 94 \\ P_1 = 4,48 \\ Z_1 = 6,\ U_1 = 6 \\ A_2 = 0,11,\ \phi_2 = -0,66 \end{cases}$
    - $\begin{cases} S_2 = 88,36 \\ P_2 = 8,73 \\ Z_2 = 11,64,\ U_2 = 11,64 \\ A_3 = 3,11,\ \phi_3 = -1 \end{cases}$
      - $\begin{cases} S_3 = 83,06 \\ P_3 = 16,94 \\ Z_3 = 16,94,\ U_3 = 16,94 \end{cases}$
      - $\begin{cases} S_3 = 98,96 \\ P_3 = 1,04 \\ Z_3 = 1,04,\ U_3 = 1,04 \end{cases}$
    - $\begin{cases} S_2 = 105,28 \\ P_2 = 0,5 \\ Z_2 = 0,\ U_2 = 0,5 \\ A_3 = 0,11,\ \phi_3 = -0,05 \end{cases}$
      - $\begin{cases} S_3 = 98,96 \\ P_3 = 1,04 \\ Z_3 = 1,04,\ U_3 = 1,04 \end{cases}$
      - $\begin{cases} S_3 = 117,91 \\ P_3 = 0 \\ Z_3 = 0,\ U_3 = 0 \end{cases}$
  - $\begin{cases} S_1 = 112 \\ P_1 = 0,24 \\ Z_1 = 0,\ U_1 = 0,24 \\ A_2 = 0,\ \phi_2 = -0,02 \end{cases}$
    - $\begin{cases} S_2 = 105,28 \\ P_2 = 0,5 \\ Z_2 = 0,\ U_2 = 0,5 \\ A_3 = 0,\ \phi_3 = -0,05 \end{cases}$
      - $\begin{cases} S_3 = 98,96 \\ P_3 = 1,04 \\ Z_3 = 1,04,\ U_3 = 1,04 \end{cases}$
      - $\begin{cases} S_3 = 117,91 \\ P_3 = 0 \\ Z_3 = 0,\ U_3 = 0 \end{cases}$
    - $\begin{cases} S_2 = 125,44 \\ P_2 = 0 \\ Z_2 = 0,\ U_2 = 0 \\ A_3 = 0,\ \phi_3 = 0 \end{cases}$
      - $\begin{cases} S_3 = 117,91 \\ P_3 = 0 \\ Z_3 = 0,\ U_3 = 0 \end{cases}$
      - $\begin{cases} S_3 = 140,49 \\ P_3 = 0 \\ Z_3 = 0,\ U_3 = 0 \end{cases}$

9 Le mouvement brownien

[a]Brown a opéré avec des grains de pollen de certaines plantes, c'est-à-dire,

> des particules ou granules d'une grosseur inaccoutumée, dont la longueur variait d'un quatre millième à un cinq millième d'un pouce.

Il dit en outre :

> Pendant que j'examinais la forme de ces particules immergées dans l'eau, j'ai observé que beaucoup d'entre elles étaient manifestement en mouvement... Ces mouvements étaient tels que, après des observations souvent répétées, je fus persuadé qu'ils ne pouvaient provenir ni du courant du fluide, ni de son évaporation graduelle, mais qu'ils appartenaient à la particule même.

Ce que Brown observait, c'était l'agitation incessante de granules en suspension dans l'eau et visibles au microscope. C'est un spectacle impressionnant.
Pour observer ce phénomène, est-il essentiel de faire un choix de plantes particulières ? Brown a répondu à cette question en répétant l'expérience avec beaucoup de plantes différentes ; il a trouvé que tous les granules, s'ils sont suffisamment petits, manifestent un tel mouvement quand ils sont en suspension dans l'eau. Il a de plus constaté le même genre de mouvement incessant et irrégulier de petites particules de substances inorganiques aussi bien qu'organiques. Même en pulvérisant un fragment de sphinx, il a observé le même phénomène.
Comment faut-il expliquer ce mouvement ? Il paraît contradictoire à toute l'expérience antérieure. L'observation de la position d'une de ces particules en suspension pendant trente secondes par exemple révèle la forme fantastique de son chemin. La chose bouleversante, c'est le caractère de son mouvement apparemment éternel. Un pendule oscillant immergé dans l'eau s'arrête bientôt, si on ne lui imprime pas un mouvement par une force extérieure. L'existence d'un mouvement qui ne s'arrête jamais paraît contraire à toute l'expérience. Cette difficulté fut éclaircie d'une manière éclatante par la théorie cinétique de la matière.
Quand on observe l'eau avec un de nos plus puissants microscopes, on ne voit pas de molécules en mouvement, telles que les dépeint la théorie cinétique de la matière. Il faut en conclure que si la théorie qui considère l'eau comme un amas de particules est juste, leur volume doit être au delà des limites de visibilité des meilleurs microscopes. Restons néanmoins fidèles à la théorie et admettons qu'elle représente une image conforme à la réalité. Les particules browniennes visibles au microscope sont bombardées par les particules plus petites qui constituent l'eau. Le mouvement brownien existe, si les particules bombardées sont suffisamment petites. Il existe, parce que ce bombardement n'a pas lieu d'une manière uniforme de tous les côtés, et l'on ne peut pas, à cause de son caractère irrégulier et contingent, en établir une moyenne. Le mouvement observé est ainsi le résultat d'un mouvement non observable. Le comportement des grosses particules reflète jusqu'à un certain point celui des molécules et constitue, pour ainsi dire, un grossissement si élevé qu'il devient visible au microscope. Le caractère irrégulier et contingent du chemin que parcourent les particules browniennes reflète une irrégularité similaire des chemins que parcourent les particules plus petites qui constituent la matière. Nous comprenons ainsi qu'une étude quantitative du mouvement brownien nous permette de pénétrer plus profondément dans la théorie cinétique de la matière. Il est évident que le mouvement brownien visible dépend de la grosseur des molécules invisibles qui effectuent le bombardement. Il n'y aurait pas de mouvement brownien du tout, si les molécules bombardantes ne possédaient pas une certaine quantité d'énergie, ou, en d'autres termes, si elles n'avaient pas une masse et une vitesse. Il n'est, par conséquent, pas étonnant que l'étude du mouvement brownien puisse conduire à la détermination de la masse d'une molécule.

a. Albert Einstein et Leopold Infeld, *The Evolution of Physics : From Early Concept to Relativity and Quanta*, 1938, Cambridge Univ. Press, chap. 1.

9.1 Motivation : les marchés continus

Il faut adapter les définitions vues dans les sections précédentes au cas d'une variable temps continue. On se limitera au cas d'un unique actif risqué.

Définition Un *processus stochastique à valeurs réelles et à temps continu* est une famille $(X_t)_{t\geq 0}$ de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathscr{A}, p)$ indicées par une variable temps $t \in \mathbb{R}$.

Remarque C'est une sorte de "fonction aléatoire". À ω fixé, on a bien une fonction, appelée "trajectoire" :

$$t \longmapsto X_t(\omega)$$

Définition Un *marché financier continu* est un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, p)$ muni d'une filtration croissante $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, avec un actif sans risque capitalisé en continu $S_t^{(0)} = e^{Rt}$, et un processus stochastique $(S_t)_{t\geq 0}$ représentant l'actif risqué, tel que chaque S_t est $\mathscr{F}_t$-mesurable.

Définition Une *stratégie* ϕ est un couple de processus stochastiques $(H_t^{(0)}, H_t)$ où $H_t^{(0)}$ et H_t sont $\mathscr{F}_t$-mesurables. $H_t^{(0)}$ est le quantité d'actif sans risque et H_t la quantité d'actif risqué présentes dans le portefeuille à l'instant t. La *valeur du portefeuille* à l'instant t est :

$$V_t(\phi) = H_t^{(0)} e^{Rt} + H_t S_t$$

Remarque On a vu (cf. exercice) qu'en faisant tendre le nombre N de pas de discrétisation vers l'infini, le modèle de Cox-Ross-Rubinstein devient un marché continu avec un actif sans risque $S_t^{(0)} = e^{Rt}$ capitalisé en continu au taux nominal R, et un actif risqué S_t tel que $\ln S_T - \ln s_0$ suive une loi normale de paramètres $(RT - \sigma^2/2, \sigma)$ si T est l'horizon du marché (en années).

Or le mouvement des atomes dans un gaz ou de petites particules dans un liquide a un comportement semblable aux trajectoires du processus $(\ln S_t)$. C'est ce qu'on appelle en physique un "mouvement brownien".

9.2 Définition, existence, loi de probabilité

Hypothèse Comme dans le cas discret, on a ici aussi besoin de faire une hypothèse sur les événements de probabilité nulle. Dans un modèle continu, on rencontre souvent de tels événements. On fait l'hypothèse que $\mathscr{F}_0$ contient au moins tous les événements de probabilité nulle :

$$(\forall A \in \mathscr{A}) \ \left[p(A) = 0\right] \Rightarrow [A \in \mathscr{F}_0]$$

Définition 9.1 *Un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien est un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ adapté à la filtration, à valeurs réelles, à incréments indépendants et stationnaires, et à trajectoires continues. C'est-à-dire que :*

(i) les trajectoires $t \mapsto X_t(\omega)$ sont presque sûrement continues

(ii) $(\forall s \leq t)$ $X_t - X_s$ est indépendant de $\mathscr{F}_s$

(iii) $(X_t - X_s)$ et $(X_{t-s} - X_0)$ ont la même loi de probabilité

Remarque On dira parfois "mouvement brownien" sans préciser la filtration : c'est alors un mouvement brownien pour la filtration naturelle associée au processus $(X_t)_{t\geq 0}$. La filtration naturelle est la filtration $(\mathscr{F}_t)$ telle que $\mathscr{F}_t$ soit la tribu la moins fine rendant $\mathscr{F}_t$-mesurables tous les X_s pour $s \leq t$.

Théorème 9.1 *Si (X_t) est un mouvement brownien, alors il existe des réels r et σ tels que, pour tout t, la variable $(X_t - X_0)$ suive une loi normale de paramètres $(rt, \sigma\sqrt{t})$.*

Démonstration (juste l'idée) cf. exercice sur le passage à la limite dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein avec $X_t = \ln \widetilde{S}_t$. On discrétise l'intervalle $[0, t]$ en N périodes, on obtient une suite de variables

$$X_0^{(N)}, \ldots, X_N^{(N)},$$

avec $X_k^{(N)} = X_{kt/N}$. Ces variables ne suivent pas nécessairement les mêmes lois que dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein, mais peu importe. On fait tendre N vers l'infini. L'indépendance et la stationnarité des incréments suffisent à prouver que $(X_t - X_0)$ suit une loi normale grâce au théorème Central Limit.

Remarque Cette démonstration montre aussi qu'*il existe un mouvement brownien* !

Définition 9.2 *Un* mouvement brownien standard *est un mouvement brownien tel que $X_0 = 0$ presque sûrement, et que, pour tout t, $E(X_t) = 0$ et $E(X_t^2) = t$.*

Pour un mouvement brownien standard, $r = 0$ et $\sigma = 1$ dans le théorème ci-dessus, et la densité de X_t est la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)}$$

9.3 Application à la physique

Dans l'extrait cité plus haut, Einstein et Infeld affirment que le mouvement brownien est une vérification expérimentale de l'existence de l'atome. Le concept d'atome est le fondement de la « théorie cinétique de la matière ». L'observation du mouvement brownien permettrait même de compter le nombre d'atomes dans 1 g d'hydrogène[3]. Comment est-ce possible ?

Détermination de σ En observant le mouvement brownien d'une particule sur une durée assez longue, ou bien plusieurs particules, on peut estimer statistiquement l'écart-type de $(X_t - X_0)$ pour t fixé, c'est-à-dire $\sigma\sqrt{t}$, d'où une estimation de σ.

Énergie cinétique moyenne E d'un atome d'hydrogène σ doit dépendre de la nature du fluide (son coefficient de viscosité μ en kg.s^{-1}) et des lois de chocs entre la particule et les atomes :

- La conservation de la quantité de mouvement (mais la quantité de mouvement moyenne d'un atome est nulle)
- La conservation de l'énergie cinétique.

3. Les moyens techniques de l'époque ne permettaient probablement pas de *voir* les atomes. Aujourd'hui, on peut voir les atomes d'un métal au moyen d'un microcope à émission de champ.

Notons E l'énergie cinétique moyenne d'un atome. Un simple calcul d'analyse dimensionnelle laisse penser que

$$\sigma^2 \sim \frac{E}{\mu}$$

d'où une estimation de E.

Nombre d'atome dans un volume donné Soit N le nombre d'atomes dans un volume V d'hydrogène à la pression P. La thermodynamique enseigne que la pression est une densité volumique d'énergie :[4]

$$P = \frac{NE}{V}$$

Alors $N = \frac{PV}{E}$

9.4 Non-dérivabilité des trajectoires browniennes

Les trajectoires browniennes sont en général des objets très pathologiques. Soit (X_t) un mouvement brownien. Le fait que la trajectoire soit dérivable en $t = 0$ est un événement de probabilité nulle (cf. exercice).

Plus généralement, quelque soit l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, aussi petit soit-il, le fait que la trajectoire soit partout dérivable sur $[a, b]$ est un événement de probabilité nulle.

Exemple Soit un marché financier discret (obtenu au terme d'un passage à la limite comme on l'a fait pour Cox-Ross-Rubinstein). Supposons que $\left(\ln \widetilde{S}_t\right)_t$ est un mouvement brownien. Soit un *call* européen à couvrir. Son prix à l'instant t sera noté

$$\widetilde{C_t} = F(t, \widetilde{S}_t)$$

Il faut construire une stratégie de réplication ϕ. En temps discret, on l'écrirait sous la forme

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum \phi_k \Delta \widetilde{S_k}$$

où $\phi_k = \frac{\Delta \widetilde{C}}{\Delta \widetilde{S}}$ est donné par le ratio de couverture. En passant à la limite, le ratio de couverture devient la dérivée partielle de F par rapport à la seconde variable $\frac{\partial F}{\partial x}$, on devrait donc avoir :

$$\begin{aligned}
V_t(\phi) &= V_0(\phi) + \int \frac{\partial F}{\partial x}(t, \widetilde{S}_t) d\widetilde{S}_t \\
&= V_0(\phi) + \int \frac{\partial F}{\partial x} \frac{d\widetilde{S}_t}{\widetilde{S}_t} \widetilde{S}_t \\
&= V_0(\phi) + \int \frac{\partial F}{\partial x} \widetilde{S}_t d(\ln \widetilde{S}_t) \\
&= V_0(\phi) + \int \frac{\partial F}{\partial x} \widetilde{S}_t \frac{d(\ln \widetilde{S}_t)}{dt} dt
\end{aligned}$$

Mais, outre tous les problèmes de convergence que pose un tel passage à la limite, la dérivée $\frac{d(\ln \widetilde{S}_t)}{dt}$ n'existe même pas puisque les trajectoires browniennes ne sont pas dérivables...

4. C'est la formule classique $PV = NkT$, où k est la constante de Boltzman et $E = kT$.

Plus généralement Si l'on raisonne en termes de discrétisation puis de passage à la limite, étant donné un processus stochastique (H_t) et un mouvement brownien (X_t), l'intégrale $\int_0^t H_t dX_t$ semble avoir un sens.

Mais on ne peut pas la définir en posant

$$\int_0^t H_t dX_t = \int_0^t H_t \frac{dX_t}{dt} dt$$

car $\frac{dX_t}{dt}$ n'existe pas. Une définition rigoureuse de cette intégrale dite *stochastique* sera donnée dans le chapitre suivant.

9.5 Variation quadratique finie

Soit (X_t) un mouvement brownien. Soit $(t_i^{(j)})_{0\leq i\leq n_j}$ une *suite de subdivisions de plus en plus fines* de l'intervalle $[0, T]$. C'est-à-dire que, pout tout $j \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq t_0^{(j)} \leq t_1^{(j)} \leq t_2^{(j)} \leq \ldots \leq t_{n_j}^{(j)} \leq T$$

Soit a_j le *pas de la subdivision* défini par

$$a_j = \max_{0\leq i\leq n_j-1} |t_{i+1}^{(j)} - t_i^{(j)}|$$

Supposons que $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$. Alors :

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{i=0}^{n_j-1} \left(X_{t_{i+1}^{(j)}} - X_{t_i^{(j)}} \right)^2 = \sigma^2 T, \quad \text{presque sûrement.}$$

Cette limite s'appelle la *variation quadratique* de la trajectoire sur l'intervalle $[0, T]$.

Démonstration : admise.

Remarque Si une trajectoire a une variation quadratique non nulle, alors elle a une variation (au sens usuel) infinie. Si une trajectoire a une variation (au sens usuel) finie, alors sa variation quadratique est nulle.

Démonstration : la variation, au sens usuel, d'une trajectoire, serait définie comme

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{i=0}^{n_j-1} \left| X_{t_{i+1}^{(j)}} - X_{t_i^{(j)}} \right|$$

Or

$$\sum_{i=0}^{n_j-1} \left(X_{t_{i+1}^{(j)}} - X_{t_i^{(j)}} \right)^2 \leq \max_i \left| X_{t_{i+1}^{(j)}} - X_{t_i^{(j)}} \right| \times \sum_i \left| X_{t_{i+1}^{(j)}} - X_{t_i^{(j)}} \right|,$$

donc

$$\sum_i \left| X_{t_{i+1}^{(j)}} - X_{t_i^{(j)}} \right| \geq \frac{\sum_{i=0}^{n_j-1} \left(X_{t_{i+1}^{(j)}} - X_{t_i^{(j)}} \right)^2}{\max_i \left| X_{t_{i+1}^{(j)}} - X_{t_i^{(j)}} \right|}$$

Quand j tend vers $+\infty$, le numérateur tend vers $\sigma^2 T$ presque sûrement, et le dénominateur tend vers 0 presque sûrement car les trajectoires sont continues presque sûrement. Donc le quotient tend vers $+\infty$.

Conséquence La longueur d'un quelconque segment d'une trajectoire d'un mouvement brownien à deux dimensions $(X_t, Y_t)_{t\geq 0}$ est, presque sûrement, infinie.

Démonstration. D'habitude, on définit la longueur d'un segment de courbe paramétrée par l'intégrale

$$\int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

mais ici c'est impossible car X_t et Y_t ne sont pas dérivables. La longueur est donc conçue comme limite :

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{i=0}^{n_j-1} \sqrt{\left(X_{t_{i+1}^{(j)}} - X_{t_i^{(j)}}\right)^2 + \left(Y_{t_{i+1}^{(j)}} - Y_{t_i^{(j)}}\right)^2} = +\infty$$

Fractales Une trajectoire brownienne est, presque sûrement, continue, mais la longueur de tout segment de cette trajectoire étant infinie, une telle trajectoire n'est pas vraiment un objet à une dimension. C'est un objet un peu intermédiaire entre les objets à une dimension (les lignes) et les objets à deux dimensions (les surfaces). On parle de « dimension fractale ». D'ailleurs, le mouvement brownien possède une autre propriété des fractales, une propriété d'invariance par changement d'échelle : l'image d'un mouvement brownien de paramètres (r, σ) par une homothétie de rapport λ est un mouvement brownien de paramètres $(r\lambda, \sigma\sqrt{\lambda})$.

10 L'intégrale stochastique

10.1 Questions

- Si (X_t) est un mouvement brownien, et (H_t) un processus stochastique, comment définir l'intégrale « stochastique » $\int_0^t H_s dX_s$?
- Quel sens donner à une équation différentielle contenant la différentielle d'un processus stochastique ?
- Si $(\ln S_t)$ est un mouvement brownien, l'équation différentielle suivante est-elle vérifiée : $\frac{dS_t}{S_t} = d(\ln S_t)$? (on verra que *non*)
- De manière équivalente, si $X_t = \ln S_t$ est un mouvement brownien, l'équation intégrale suivante est-elle vérifiée : $S_t = s_0 + \int_0^t S_s dX_s$? (on verra que *non*)

10.2 Existence d'une intégrale stochastique

Théorème 1 Soit (B_t) un $\mathscr{F}_t$-brownien standard. Alors pour tout processus stochastique (H_t) adapté à la filtration et tel que

$$E\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < +\infty,$$

il existe une $(\mathscr{F}_t)$-martingale $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ appelée *intégrale stochastique* et vérifiant les propriétés attendues (linéarité, relation de Chasles, positivité, calcul approché par des sommes de Riemann, *etc.*). Elle est notée, pour tout $t \in [0, T]$:

$$M_t = \int_0^t H_s dB_s$$

De plus $M_0 = 0$ et (M_t) est de carré intégrale (c'est-à-dire que $\forall t \quad E(M_t^2) < +\infty$). On a même :

$$\frac{1}{4} E\left(\sup_t M_t^2\right) \leq E\left(M_T^2\right) = E\left(\int_0^T H_s^2 ds\right)$$

Démonstration : *cf.* exercice dans le cas où $H_s = f(s)$ est une fonction déterministe, et Lamberton-Lapeyre [7] p. 47-50 dans le cas général.

Théorème 2 Soit (B_t) un mouvement brownien standard, $(\mathscr{F}_t)$ la filtration naturelle, et $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ une $(\mathscr{F}_t)$-martingale de carré intégrable. Alors il existe un processus stochastique (H_t) $\mathscr{F}_t$-mesurable tel que

$$E\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < +\infty$$

et que, presque sûrement :

$$(\forall t \in [0, T]) \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s$$

Démonstration : *cf.* Karatzas-Shreve [6].

Remarque Ayant ainsi défini l'intégrale stochastique pour un mouvement brownien standard, on peut facilement étendre cette définition à d'autre processus stochastiques (X_t). En particulier, si X_t est de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s,$$

alors on pose, par définition :

$$\int_0^t f(s) dX_s = \int_0^t f(s) K_s ds + \int_0^t f(s) H_s dB_s.$$

L'intégrale ainsi définie vérifie encore toutes les propriétés attendues. On dit qu'un tel (X_t) est un « processus d'Itô ». On écrira aussi :

$$dX_s = K_s ds + H_s dB_s.$$

10.3 Formule d'Itô

Soit f une fonction intégrable et F une primitive de f. Si $s \mapsto x(s)$ est une fonction suffisamment régulière, le théorème fondamental du calcul intégral affirme que

$$\int_{x(0)}^{x(t)} f(x) dx = \int_0^t f(x(s)) x'(s) ds = F(x(t)) - F(x(0))$$

mais les trajectoires d'un mouvement brownien (B_s) ne sont pas dérivables, et en général

$$\int_0^t f(B_s) dB_s \neq F(B_t) - F(B_0).$$

Si F est suffisamment régulière, il existe pourtant une formule (due à Itô et Döblin, années 40) exprimant $F(B_t) - F(B_0)$ au moyen des dérivées de F :

$$F(B_t) - F(B_0) = \int_0^t F'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(B_s) ds$$

Démonstration Appliquons la formule de Taylor à l'ordre 2 à la fonction F en chaque point d'une subdivision de l'intervalle $[0,t]$:

$$F(B_t)-F(B_0)=\sum_{i=0}^{n}F(B_{t_{i+1}})-F(B_{t_i})=\sum_{i=0}^{n}F'(B_{t_i})(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})+\frac{F''(B_{t_i})}{2}(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2+(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2\varepsilon(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})$$

Appliquons cette formule à une suite $(t_i^{(j)})_{0\le i\le n_j}$ de subdivisions de plus en plus fines. Les trajectoires du mouvement brownien ont une variation quadratique finie, donc à la limite :

$$F(B_t)-F(B_0)=\lim_{j\to+\infty}\sum_{i=0}^{n_j}F'(B_{t_i^{(j)}})(B_{t_{i+1}^{(j)}}-B_{t_i^{(j)}})+\frac{1}{2}\lim_{j\to+\infty}\sum_{i=0}^{n_j}F''(B_{t_i^{(j)}})(B_{t_{i+1}^{(j)}}-B_{t_i^{(j)}})^2$$

Le terme de gauche est l'intégrale stochastique $\int F'(B_s)dB_s$. Pour calculer le terme de droite, étudions seulement la contribution des indices i pour lesquels $t_i^{(j)}\in[s,s+\Delta s]$. La trajectoire brownienne est continue, donc sur cet intervalle $F''(B_{t_i^{(j)}})\simeq F''(B_s)$ est à peu près constant et on peut le mettre en facteur. Or la somme

$$\sum_{t_i^{(j)}\in[s,s+\Delta s]}(B_{t_{i+1}^{(j)}}-B_{t_i^{(j)}})^2,$$

tend vers Δs quand le pas de la subdivision tend vers zéro car c'est la variation quadratique du mouvement brownien standard sur l'intervalle $[s,s+\Delta s]$.

Plus généralement, pour une fonction de deux variables $(x,t)\mapsto F(x,t)$, on a la formule d'Itô suivante :

$$F(B_t,t)-F(B_0,0)=\int_0^t\left(\frac{\partial F}{\partial x}(B_s,s)dB_s+\frac{\partial F}{\partial t}(B_s,s)ds\right)+\frac{1}{2}\int_0^T\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(B_s,s)ds$$

Exemple Utilisons la formule d'Itô pour calculer l'intégrale stochastique $\int_0^t B_s dB_s$ où (B_t) est un mouvement brownien standard. La primitive de x est $x^2/2$, donc

$$\int_0^t B_s dB_s=\left[\frac{B_s^2}{2}\right]_0^t-\frac{1}{2}\int_0^t ds=\frac{B_t^2-t}{2}$$

10.4 Intégration par parties

Appliquons la formule d'Itô aux produit fg de deux fonctions d'une variable. On a :

$$(fg)'=f'g+fg' \qquad (fg)''=f''g+2f'g'+fg''$$

La formule d'Itô donne :

$$(fg)(B_t)-(fg)(B_0)=\int_0^t(f'g+fg')(B_s)dB_s+\frac{1}{2}\int_0^t(f''g+2f'g'+fg'')(B_s)ds$$

Or $f(B_t)=f(B_0)+\int_0^t f'(B_s)dB_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds$ est un processus d'Itô, ainsi que $g(B_t)$; on écrira donc

$$df(B_s)=f'(B_s)dB_s+\frac{1}{2}f''(B_s)ds$$

$$dg(B_s) = g'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}g''(B_s)ds$$

Cela permet de regrouper certains termes dans la formule d'Itô ci-dessus, et on obtient la formule suivante qui généralise la formule classique d'intégration par parties :

$$(fg)(B_t) - (fg)(B_0) = \int_0^t g(B_s)df(B_s) + \int_0^t f(B_s)dg(B_s) + \int_0^t f'(B_s)g'(B_s)ds$$

11 Formules de Black et Scholes

Hypothèses concernant l'actif risqué On suppose que les incréments relatifs du prix de l'actif risqué sont indépendants et stationnaires, c'est-à-dire que $\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} = \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} - 1$ est indépendant de $\mathscr{F}_t$ et qu'il a la même loi de probabilité que $\left(\frac{S_{\Delta t}}{S_0} - 1\right)$. Cela revient à demander que $(\ln S_{t+\Delta t} - \ln S_t)$ soit indépendant de $\mathscr{F}_t$ et qu'il ait la même loi que $(\ln S_{\Delta t} - \ln S_0)$. Notre hypothèse s'exprime donc de manière concise : $(\ln S_t)$ *est un mouvement brownien.*

Comment interpréter les paramètres de ce mouvement brownien ? Pour Δt petit, on a

$$\ln S_{\Delta t} - \ln s_0 = \ln\left(1 + \frac{S_{\Delta t} - S_0}{S_0}\right) \simeq \frac{S_{\Delta t} - S_0}{S_0}$$

Cet incrément brownien est donc le *taux de rentabilité* de l'actif risqué sur une durée Δt. Son écart-type est de la forme $\sigma\sqrt{\Delta t}$, où σ est l'un des paramètres du mouvement brownien : σ est donc *l'écart-type par an du taux de rentabilité de l'actif risqué.* On l'appelle aussi « volatilité ». Attention aux changements d'unité :

$$\text{dimension de } \sigma = \text{taux}.\text{temps}^{-\frac{1}{2}}$$

(on dit « volatilité par an », mais il faudrait en fait dire « volatilité par racine carrée d'année » !)

Quant à l'autre paramètre du mouvement brownien, il est moins important car on sait que la tendence du marché aura peu d'influence sur le prix des options (*cf.* modèles discrets). On le posera égal à $(\mu - \sigma^2/2)$; ainsi

$$\ln S_t - \ln s_0 = (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t$$

où (B_t) est un mouvement brownien standard.

Lemme Soit $W_t = \mu t + \sigma B_t$ où (B_t) est un mouvement brownien standard, et $S_t = s_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma B_t}$, alors S_t est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = dW_t$$

Démonstration Exercice (*indication* : écrire l'équation différentielle sous forme d'une équation intégrale).

Remarque $W_t \neq \ln S_t$, malgré l'équation $\frac{dS_t}{S_t} = dW_t$!

Hypothèses concernant l'option européenne On cherche à estimer le prix d'une option européenne de la forme $f(T,S_T)$. On fera l'hypothèse qu'il existe une stratégie de réplication $\phi = (H_t^{(0)}, H_t)$ telle que $V_t(\phi)$ ne dépende que de t et de S_t. On posera :

$$f(t,S_t) = V_t(\phi) = H_t^{(0)} e^{Rt} + H_t S_t$$

Cette stratégie doit être admissible :

$$(\forall t) \;\; V_t(\phi) \geq 0$$

Elle doit être autofinancée :

$$d(e^{-Rt} f(t,S_t)) = H_t d(e^{-Rt} S_t)$$

Cette condition d'autofinancement est une équation différentielle stochastique. Il suffit de la résoudre pour trouver $f(t,S_t)$.

Réécrivons tout en fonction du mouvement brownien standard On pose

$$\varphi(t,x) = e^{-Rt} f(t, s_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma x}),$$

de sorte que $\varphi(t,B_t) = e^{-Rt} f(t,S_t)$; puis applique la formule d'Itô pour calculer $d(\varphi(t,B_t))$. Il faut donc calculer les dérivées partielles de φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -Re^{-Rt} f + e^{-Rt} \frac{\partial f}{\partial t} + e^{-Rt} (\mu - \sigma^2/2) S_t \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = e^{-Rt} \sigma S_t \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = e^{-Rt} \sigma^2 S_t \frac{\partial f}{\partial x} + e^{-Rt} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Finalement :

$$(1) \qquad d(\varphi(t,B_t)) = e^{-Rt} \left(\mu S_t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} - f + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + e^{-Rt} \sigma S_t \frac{\partial f}{\partial x} dB_t$$

D'autre part, le lemme de la page précédente permet de réécrire le membre à droite dans la condition d'autofinancement :

$$(2) \qquad H_t d(e^{-Rt} S_t) = H_t e^{-Rt} S_t ((\mu - R) dt + \sigma dB_t)$$

En utilisant (1) et (2), la condition d'autofinancement devient :

$$0 = e^{-Rt} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} - H_t \right) S_t \mu + \frac{\partial f}{\partial t} - Rf + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + H_t S_t R \right] dt + e^{-Rt} \sigma S_t \left(\frac{\partial f}{\partial x} - H_t \right) dB_t$$

Pour trouver une solution, il suffit de trouver f et H_t tels que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} - H_t = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial t} - Rf + \dfrac{\sigma^2}{2} S_t^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial f}{\partial x} R S_t = 0 \end{cases}$$

À partir de là, pour le *call* et le *put* européens, on peut vérifier les formules de Black et Scholes *a posteriori*, par un simple calcul de dérivées. Plus généralement, on appliquera la méthode suivante.

Méthode de Feynman-Kac C'est une sorte de changement de variable. Soit à résoudre une équation aux dérivées partielles. Cherchons une mesure de probabilité $p^\star$ et un processus X_t (pensé comme nouvelle variable) tels que dX_t soit de la forme $dX_t = Edt + FdB_t$, et que l'équation aux dérivées partielles entraîne $E = 0$. Alors, sous $p^\star$, le processus X_t serait une martingale. Dans ce cas,

$$X_t = \mathrm{E}^\star(X_T \mid \mathscr{F}_t),$$

Application On pose $X_t = \varphi(t, B_t)$. La condition d'autofinancement permet alors d'écrire

$$dX_t = H_t e^{-Rt} S_t(\mu - R)dt + H_t e^{-Rt} S_t \sigma dB_t$$

Choisissons $p^\star$ de sorte que $\mu = R$. Alors (X_t) est une martingale sous $p^\star$:

$$\varphi(t, B_t) = \mathrm{E}^\star(\varphi(T, B_T) \mid \mathscr{F}_t)$$

Pour le *call* et le *put* européen, on a déjà vu (*cf.* feuille d'exercices sur Cox-Ross-Rubinstein) comment trouver les formules de Black et Scholes à partir de là.

[a]Brown was working with grains of pollen of certain plants, that is :

> particles of granules of unusually large size varying from one four-thousandth to about five-thousandth of an inch in length.

He reports further :

> While examining the form of these particles immersed in water, I observed many of them evidently in motion... These motions were such as to satisfy me, after frequently repeated observation, that they arose neither from current in the fluid nor from its gradual evaporation, but belonged to the particle itself.

What Brown observed was the unceasing agitation of the granules when suspended in water and visible through the microscope. It is an impressive sight !
Is the choice of particular plants essential for the phenomenon ? Brown answered this question by repeating the experiment with many different plants, and found that all the granules, if sufficiently small, showed such motion when suspended in water. Furthermore, he found the same kind of restless, irregular motion in very small particles of inorganic as well as organic substances. Even with a pulverized fragment of a sphinx he observed the same phenomenon !
How is this motion to be explained ? It seems contradictory to all previous experience. Examination of the position of one suspended particle, say every thirty seconds, reveals the fantastic form of its path. The amazing thing is te apparently eternal character of the motion. A swinging pendulum placed in water soon comes to rest if not impelled by some external force. The existence of a never-diminishing motion seems contrary to all experience. This difficulty was splendidly clarified by the kinetic theory of matter.
Looking at water through even our most powerful microscopes we cannot see molecules and their motion as pictured by the kinetic theory of matter. It must be concluded that if the theory of water as a congregation of particles is correct, the size of the particles must be beyond the limit of visibility of the best microscopes. Let us nevertheless stick to the theory and assume that it represents a consistent picture of reality. The Brownian particles visible through a microscope are bombarded by the smaller ones composing the water itself. The Brownian movement exists if the bombarded particles are sufficiently small. It exists because this bombardment is not uniform from all sides and cannot be averaged out, owing to its irregular and haphazard character. The observed motion is thus the result of the unobservable one. The behaviour of the big particles reflects in some way that of the molecules, constituting, so to speak, a magnification so high that it becomes visible through the microscope. The irregular and haphazard character of the path of the Brownian particles reflects a similar irregularity in the path of the smaller particles which constitute matter. We can understand, therefore, that a quantitative study of Brownian movement can give us deeper insight into the kinetic theory of matter. It is apparent that the visible Brownian motion depends on the size of the invisible bombarding molecules. There would be no Brownian motion at all if the bombarding molecules did not possess a certain amount of energy or, in other words, if they did not have mass and velocity. That the study of Brownian motion can lead to a determination of the mass of a molecule is therefore not astonishing.

a. Albert Einstein and Leopold Infeld, *The Evolution of Physics : From Early Concept to Relativity and Quanta*, 1938, Cambridge Univ. Press, chap. 1.

12 Table of Contents

Références

[1] *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui*, volume 3. Cassini, 2007. *cf.* exposés de Nicole El Karoui et Marc Yor.

[2] Argaud and Dubois. *Méthodes mathématiques pour la finance.* ellipses, Paris, 2006.

[3] Zvi Bodie and Robert Merton. *Finance.* chapitre 15, Merton explique comment utiliser Black et Scholes pour des actions versant des dividendes.

[4] Pascal Canfin. *Ce que les banques disent et pourquoi il ne faut presque jamais les croire.* Les petits malins, 2012.

[5] John Hull. *Options, futures, and other derivatives.*

[6] Karatzas and Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer-Verlag, 1988.

[7] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.* ellipses, Paris, 1997.

[8] Gilles Pagès and Claude Bouzitat. *En passant par hasard...* Vuibert, 1999.