Séminaire de pré-rentrée – Mathématiques

Erwan Penchèvre

2016

Révision 685 – 18 août 2016

Nombres réels

Exercice 1 Montrer que si a et b sont deux nombres réels positifs, alors on a $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Exercice 2 Dessiner les ensembles de points suivants :

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$
$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2|x - y| < 1\right\}$$

Exercice 3 Soit x un réel tel que $x \in]1, 3]$. Encadrer le réel $\dfrac{\sqrt{x^2 + 6x} - 2}{3(x + 2) - \sqrt{x}}$

Exercice 4 Développez $(x + 3)^5$

Exercice 5 Calculer la somme $a+b+c+d+e$ sachant que $b - a = c - b = d - c = e - d = r$, où r désigne un nombre réel.

Exercice 6 *Calcul des sommes* $S_n(k) = \sum_{j=1}^{n} j^k$, *pour* $k = 1, 2, 3$.

1. (a) Déterminer un polynôme P non nul de degré 2 tel que $P(x + 1) - P(x) = x$
   (b) En déduire que $S_n(1) = P(n + 1) - P(1)$
   (c) Calculer $S_n(1) = \sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + 3 + ... + n$
2. (a) Déterminer un polynôme P non nul de degré 3 tel que $P(x + 1) - P(x) = x^2$
   (b) En déduire que $S_n(2) = P(n + 1) - P(1)$
   (c) Calculer $S_n(2) = \sum_{j=1}^{n} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$
3. (a) Déterminer un polynôme P non nul de degré 4 tel que $P(x + 1) - P(x) = x^3$
   (b) En déduire que $S_n(3) = P(n + 1) - P(1)$
   (c) Calculer $S_n(3) = \sum_{j=1}^{n} j^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$

Exercice 7 Trouver le rationnel p/q (sous forme de fraction irréductible, c'est-à-dire avec p et q premiers entre eux) dont le développement décimal illimité s'écrit $0,58\overline{3} = 0,58333...$

Exercice 8 Soit p un nombre entier. Démontrer que p est un multiple de 6 si et seulement si p^2 est un multiple de 6.

Exercice 9 Calculer $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Exercice 10

1. Vérifier que $\sqrt{8-\sqrt{15}} = \dfrac{\sqrt{15}-1}{\sqrt{2}}$.
2. Vérifier que $\sqrt{17+12\sqrt{2}} + \sqrt{17-12\sqrt{2}} = 6$.

Exercice 11 Si a et b sont deux nombres réels positifs, montrer que $0 \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Exercice 12 Montrer que $\alpha = 1+\sqrt[3]{2}$ est une racine du polynôme $x^3 - 3x^2 + 3x - 3$. *Indication :* développer $(\alpha - 1)^3$.

Exercice 13 Soit $P(x) = 6x^3 - 2x^2 - mx - 2$ où m désigne un réel. Démontrer qu'il existe une valeur de m telle que P soit divisible par $(x+1)$, et une autre valeur de m telle que P soit divisible par $(2x-3)$.

Exercice 14 Déterminer trois réels α, β, γ tels que le polynôme $x^4+3x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ soit divisible par le polynôme $(x^2-1)(x+2)$.

Nombres complexes

Exercice 1 Calculer le module des nombres complexes suivants :

$$w = 2i(3+i)(2+4i)(1+i) \qquad t = \frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}$$

Exercice 2 Déterminer les réels x et y vérifiant les relations suivantes :

1. $e^{x+iy} = -1$
2. $xe^{iy} = \dfrac{1+i}{1-i}$

Exercice 3

1. Exprimer $\cos(3\theta)$, $\cos(4\theta)$ et $\sin(5\theta)$ en termes de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
2. Linéariser $\sin^3\theta$, $\cos^3\theta$ et $\cos^4(\theta)\sin^2(\theta)$.

Exercice 4 Calculer les racines carrées complexes des nombres suivants :

$$16,\ -16,\ i,\ -i,\ -5-12i,\ 1+i,\ -7+24i,\ -7-24i$$

Exercice 5

1. Calculer les racines cubiques de $a = \dfrac{-1+i}{4}$
2. Calculer les puissances quatrièmes de ces racines cubiques.

Exercice 6 Montrer que si un nombre complexe vérifie $(z-2)^4 + z^4 = 0$, alors sa partie réelle est égale à 1.

Exercice 7 Soit z et z' deux nombres complexes. Montrer que l'on a l'égalité :

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$$

Exercice 8

1. Exprimer $\sin(5\alpha)$ sous la forme $\sum\limits_{k=0}^{5} a_k \sin^k(\alpha)$, avec $a_k \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $\sum\limits_{k=0}^{5} a_k x^k = 0$.
3. En déduire le calcul de $\cos(\pi/5)$ et de $\sin(\pi/5)$.

Exercice 9 Démontrer que, si $|z| = |z'| = 1$, les nombres complexes $u = \dfrac{z+z'}{1+zz'}$ et $v = i\dfrac{z-z'}{1+zz'}$ sont réels.

Exercice 10 Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $\left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1996}$.

Exercice 11 Calculer $(1+i\sqrt{3})^{1992}$

Exercice 12 Calculer les racines quatrièmes de $(1+i\sqrt{3})$. En déduire les valeurs de $\cos(13\pi/12)$ et $\sin(13\pi/12)$.

Exercice 13 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^\pi e^x \sin x \mathrm{d}x, \qquad \int_0^\pi e^x \cos x \mathrm{d}x$$

a) en utilisant les nombres complexes.

b) à l'aide d'une double intégration par parties.

Exercice 14 Soit x un nombre réel et n un entier supérieur ou égal à 1. Calculer la somme :

$$1 + e^{ix} + e^{2ix} + ... + e^{nix}$$

En déduire la valeur des sommes :

$$S_1 = 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + ... + \cos(nx)$$

$$S_2 = 1 + \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + ... + \sin(nx)$$

Exercice 15 Résoudre les équations : (trouver $z \in \mathbb{C}$)

(1) $z^4 - 1 = 0$

(2) $z^4 + 1 = 0$

(3) $1 + z^2 + z^4 + z^6 + z^8 + z^{10} + z^{12} + z^{14} = 0$

Exercice 16 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations du second degré suivantes :

(i) $z^2 - iz - (1+i) = 0$

(ii) $z^2 - (3+2i)z + (1+3i) = 0$

(iii) $z^2 + iz + 1 = 0$

(iv) $z^2 + 2iz - 1 = 0$

(v) $z^2 + 2iz - \dfrac{3i}{4} = 0$

(vi) $z^2 + (4+i)z + (5+5i) = 0$

Exercice 17 On considère l'équation

$$(E) \qquad x^3 - 3x + a = 0$$

où x est l'inconnue, un nombre réel, et a est un paramètre réel.

1. Déterminer, suivant la valeur de a, le nombre de solutions de l'équation (E)
2. On note C le cercle de centre O et de rayon 1. Soient A et B deux points sur C. On note a la longueur de la corde $[AB]$ du cercle C. On choisit l'arc (non orienté) $\widehat{AB}$ de longueur (que l'on notera $\ell(\widehat{AB})$) inférieure ou égale à π (l'un des deux, si la longueur est π) et on le partage en trois arcs de même longueur, en obtenant les points D et E sur le cercle C tels que $y = \ell(\widehat{AD}) = \ell(\widehat{DE}) = \ell(\widehat{EB})$.
   (a) Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour le paramètre a, dans cette question ?
   (b) Prouver que $2\sin(y/2)$ est une solution de (E).
   (c) Lorsque $a = 1$, peut-on, en s'inspirant de (ii), trouver toutes les solutions de (E) ?

Exercice 18 *Racines cinquièmes de l'unité.*

1) Au nombre complexe z, on associe le nombre complexe $Z = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$.

a) Vérifiez que si $z \neq 1$, alors $Z = \dfrac{1-z^5}{1-z}$.

b) On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Calculer Z, en déduire la valeur de la somme S :

$$S = 1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}.$$

2) Montrer qu'on a les deux égalités suivantes :

$$\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=4\cos^2\frac{\pi}{5}-2,\qquad \cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}=-2\cos\frac{\pi}{5}$$

et en déduire la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{5}$.

3) Montrer que $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\cos\dfrac{4\pi}{5}$ sont solutions de l'équation $4X^2+2X-1=0$.

4) Montrer que, dans un repère orthonormé, $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\cos\dfrac{4\pi}{5}$ sont les abscisses des points communs au cercle (C) de centre $\Omega(-0,25;0)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$, et à l'axe des abscisses.

5) Déduire de ce qui précède une construction des sommets d'un pentagone régulier.

Trigonométrie

Exercice 1 Compléter le tableau suivant sans effectuer aucun calcul

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
$\cos x$							
$\sin x$							
$\tan x$							

Calculer $\tan(25\pi/3)$, $\cos(19\pi/4)$, $\tan(37\pi/6)$.

Exercice 2 Résoudre les équations :

(i) $\cos x = 0,5$

(ii) $\sin x = -0,5$

(iii) $\cos x = -0,5$

(iv) $\tan x = -1$

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante, et placer sur le cercle trigonométrique les images des solutions : $\cos(5x) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right)$

Exercice 4 *Etude de la transformation de $a\cos\theta + b\sin\theta$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.*

Soit a et b deux réels dont l'un au moins est non nul.

a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $a\cos\theta + b\sin\theta$ est la partie réelle du nombre complexe $e^{i\theta}(\overline{a+ib})$.

b) Notons r le module de $a + ib$ et ϕ l'un de ses arguments. Démontrer qu'alors, pour tout réel θ, on a : $a\cos\theta + b\sin\theta = r\cos(\theta - \phi)$.

c) *Application.* Utiliser cette transformation pour exprimer, à l'aide d'un cosinus, puis à l'aide d'un sinus, chacun des nombres réels suivants : $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$, $\cos 3\theta + \sin 3\theta$, $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta$.

Exercice 5 *Application à la résolution des équations de la forme $a\cos x + b\sin x = c$.*

Soit a, b et c trois nombres réels tels que a et b ne soient pas tous les deux nuls à la fois. D'après l'exercice précédent (en gardant les mêmes notations) résoudre l'équation $a\cos x + b\sin x = c$ est équivalent à résoudre l'équation $r\cos(x - \phi) = c$.

a) Expliquez pourquoi l'équation n'a pas de solutions lorsque $c^2 > a^2 + b^2$.

b) Dans le cas où $c^2 \leq a^2 + b^2$, notons α un nombre réel tel que $\cos\alpha = \dfrac{c}{r}$. Déterminez alors les solutions de l'équation initiale.

c) *Application.* Utilisez les méthodes précédentes pour résoudre chacune des équations suivantes :

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = -1, \qquad \cos 3x + \sin 3x = 1, \qquad 4\cos x + 3\sin x = -6$$

$$\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = \sqrt{2}, \qquad 2\cos 2x = (1+\sqrt{3})(\cos x - \sin x).$$

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$, puis l'inéquation $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 > 0$.

Exercice 7 Ecrire les formules de transformation de sommes et de différences $\cos p + \cos q$, $\cos p - \cos q$, $\sin p + \sin q$, $\sin p - \sin q$ en produits de cosinus et de sinus. *Application* : étudier le signe de la fonction réelle définie pour tout x réel par :

$$f(x) = \cos 3x + \cos 5x.$$

Exercice 8 Ecrire les formules de linéarisation qui donnent les produits $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$, $\sin(a)\cos(b)$ comme sommes de sinus et de cosinus. *Application :* calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g : x \mapsto g(x) = \sin(3x)\sin(7x)$.

Exercice 9 Etudier les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x\cos x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^4 x}{\sin^4 x}, \qquad \lim_{x\to\pi/4} \frac{|\sin x - \cos x|}{x - \pi/4}$$

Exercice 10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(i) $\sin 2x + \cos 2x = -1$

(ii) $\sin^2 x + \frac{5}{2}\cos x = 0$

(iii) $6\sin^3 x + \sin 3x = 0$

Exercice 11 Etudier et représenter graphiquement les fonctions trigonométriques suivantes :

$$f(x) = \cos^2 x \times \sin 2x$$

$$f(x) = \left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^2$$

Fonctions élémentaires

Exercice 1 La radioactivité d'un élément est mesurée à l'instant t par le nombre $f(t) = Ce^{-kt}$.

1) Déterminer en fonction de k le temps T au bout duquel, en partant de l'instant $t = 0$, la radioactivité aura diminué de moitié.
2) *Applications.*
   a) L'iode 131, pour lequel $k = 8,65.10^{-2}$ (T est exprimé en jours).
   b) Le plutonium 239, pour lequel $k = 0,276.10^{-4}$ (T est exprimé en années).

Exercice 2 On considère une population de bactéries que l'on observe toutes les heures. On constate qu'au bout de trois heures, la population contient 10000 individus, et au bout de quatre heures, 20000. Au bout de combien de temps la population contiendra-t-elle 100000 individus ? (on suppose que la population évolue en milieu ouvert, c'est-à-dire que rien ne s'oppose à sa multiplication)

Exercice 3 Les tissus vivants contiennent du Carbone 14 radioactif dont la demi-vie est de 5568 ans (c'est la période au bout de laquelle la moitié du Carbone 14 figurant dans l'échantillon a disparu).

1) Exprimer, en fonction du temps, la proportion de Carbone 14 figurant dans un échantillon.
2) Quel est l'âge d'un échantillon contenant les 4/5 de la quantité initiale de Carbone 14 ?

Dans les exercices suivants, f désignera toujours une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$. L'objectif de ces exercices est de montrer que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Il faut faire ces quatre exercices dans l'ordre.

Exercice 4 *Fonctions paires et équation fonctionnelle.*

1) Soit f une fonction paire. Montrer que f vérifie l'équation fonctionnelle :

$$(\star) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad F(x) - F(-x) = 0$$

2) Réciproquement toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant cette équation fonctionnelle est-elle une fonction paire ? Justifier votre réponse.
3) Soit f et g deux fonctions vérifiant l'équation fonctionnelle $(\star)$. On pose $h = f + g$. Montrer que h vérifie l'équation fonctionnelle $(\star)$. En déduire que h est une fonction paire.

4) Soit f une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle $(*)$. Soit λ un nombre réel. On pose $h = \lambda f$. Montrer que h vérifie l'équation fonctionnelle $(*)$ et en déduire que h est une fonction paire.
5) Déduire de ce qui précède que si f n'est pas la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, alors il existe une infinité de fonctions satisfaisant l'équation fonctionnelle $(\star)$.
6) *Applications.* Pour chacune des fonctions suivantes, montrer qu'elle vérifie l'équation fonctionnelle $(\star)$. Qu'en déduisez-vous ?

$$f(x) = 4\sqrt{x^2+2} + 5 - 4x^4$$

$$g(x) = \frac{x^6 - 2x^8}{5 + 2x^2}$$

$$h(x) = 2 - \frac{1}{2x^2 + \pi} + 4\sqrt{x^2+3}$$

Exercice 5 *Fonctions impaires et équation fonctionnelle.*

1) Soit f une fonction impaire, montrer que f vérifie l'équation fonctionnelle :

$$(\star\star) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad F(x) + F(-x) = 0$$

2) Réciproquement, toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle $(\star\star)$ est-elle une fonction impaire ? Justifier votre réponse.
3) Soit f et g deux fonctions vérifiant l'équation fonctionnelle $(\star\star)$. Posons $h = f + g$. Montrer que h vérifie l'équation $(\star\star)$. En déduire que h est une fonction impaire.
4) Soit f une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle $(\star\star)$. Soit λ un nombre réel. On pose $h = \lambda f$. Montrer que h vérifie l'équation fonctionnelle $(\star\star)$. En déduire que h est une fonction impaire.
5) Déduire de ce qui précède que si f n'est pas la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, alors il existe une infinité de fonctions satisfaisant l'équation fonctionnelle $(\star\star)$.
6) *Applications.* Pour chacune des fonctions suivantes, montrer qu'elle vérifie l'équation fonctionnelle $(\star\star)$. Qu'en déduisez-vous ?

$$f(x) = 4x\sqrt{x^2+2} + x^3 - 4x^5$$

$$g(x) = \frac{x^3 - 2x^7}{5 + 2x^2}$$

$$h(x) = \frac{\pi}{2x^3 + \frac{4}{3}x} + 4x^9\sqrt{x^2+3}$$

Exercice 6 On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions i et p par :

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

1) Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, calculer $p(x) + i(x)$.
2) Montrer que la fonction p vérifie l'équation fonctionnelle ($\star$) définie plus haut.
3) Montrer que la fonction i vérifie l'équation fonctionnelle ($\star\star$).
4) En déduire que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 7 *Détermination des fonctions p et i dans quelques exemples.*

1) Soit f une fonction affine. Démontrer que p est une fonction constante sur $\mathbb{R}$ et i une fonction linéaire.
2) Soit f une fonction polynôme de degré 3. Montrer que p est une fonction polynôme de degré 2, ne contenant pas de puissance impaire de x. Montrer que i est une fonction polynôme de degré 3 ne contenant pas de puissance paire de x. A titre d'exemple, calculer les p et i de la fonction $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$.
3) Soit f la fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 3}{5x^4 + 2}$. Calculer p et i.
4) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7x - 4 + 3\sqrt{\dfrac{4}{5}x^6 + 2}$. Calculer p et i.

Suites numériques

Exercice 1 Les suites suivantes sont-elles croissantes, strictement croissantes, décroissantes, strictement décroissantes, ni croissantes ni décroissantes ? Justifier votre réponse dans chaque cas :

$$u_n = n^2 + n, \qquad v_n = n^3 - 1, \qquad w_n = \cos((2n+1)\pi)$$

Exercice 2 Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = -n^2 + 2n$ est strictement décroissante. Prouver de deux manières différentes que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est divergente, par un calcul de limite puis par la mise en défaut d'un théorème classique.

Exercice 3 Etudier la convergence des suites définies par :

$$u_n = \frac{3n-2}{2n+5}, \qquad v_n = \frac{3n^3+2n^2-1}{6n^3-1}, \qquad w_n = \frac{\sin n}{n},$$

$$x_n = (-1)^n, \qquad y_n = \frac{(-1)^n}{2^n}.$$

Exercice 4 Rappelons que, pour tout entier positif n, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

a) Montrer que, pour tout réel x positif, on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$$

Exercice 5 Soit g_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ln(x)$.

- Etudier les variations de la fonction g_n. Déterminer les limites aux bornes de g_n.
- En déduire l'existence d'un réel positif α_n unique tel que $g_n(\alpha_n) = 0$.
- Montrer que : $1 \leq \alpha_n < e^2$.
- Montrer que : $\ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$. Exprimer $g_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et de n. En déduire que $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.
- Montrer que la suite de terme général α_n est convergente. On note ℓ sa limite.
- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(\alpha_n)$ et en déduire ℓ.

Exercice 6 Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$.

(i) Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $g(t) = \ln(1+t) - t + \dfrac{t^2}{4}$.
En utilisant les variations de g, démontrer que pour tout nombre réel $t \in [0,1]$ on a $\ln(1+t) \leq t - \dfrac{t^2}{4}$.

(ii) En déduire que pour tout entier strictement positif on a $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-\dfrac{1}{4n}}$.

(iii) Démontrer que pour tout entier strictement positif on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq e^{-\dfrac{1}{4n}}$.

(iv) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a $u_n \leq e^{-1-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n-2}+...+\dfrac{1}{2}+1\right)}$.

(v) Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $\displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}$.
Indication : on pourra utiliser des considérations d'aire.

(vi) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a $u_n \leq e^{-1-\dfrac{1}{4}\ln n}$. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$?

Exercice 7 On note $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$ et on admet que

$$(\forall x \in [0,1]) \quad \frac{2}{3} \leq I \leq \frac{23}{30}$$

Le but de cet exercice est l'étude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par une intégrale :

$$u_n = \int_0^n e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

(i) Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

(ii) Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

(iii) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$0 \leq \int_0^n e^{-x^2}\mathrm{d}x \leq \int_1^n xe^{-x^2}\mathrm{d}x$$

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$0 \leq \int_0^n e^{-x^2}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2e}$$

(iv) En utilisant l'encadrement de l'intégrale I donné au début de cet exercice, prouver que pour tout entier $n \geq 1$ on a $\dfrac{2}{3} \leq u_n \leq 1$.

(v) La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

Exercice 8 *Théorème : Toute suite convergente est bornée.*

La première partie de cet exercice vise à démontrer ce théorème sur un exemple. La deuxième partie aura pour objectif de montrer que la réciproque est fausse : une suite bornée n'est pas nécessairement convergente.

1) *Etude d'une exemple.* Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \frac{3 + 2\sin n}{2n+1}$$

a) Prouver que pour tout n, on a $|3 + 2\sin n| \leq 5$.

b) En déduire une majoration de $|u_n|$.

c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et donner sa limite.

d) Montrer que, dès que $n > 100$, on a $|u_n| < \dfrac{2}{67}$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

2) *Etude d'un contre-exemple.* Pour tout entier naturel n, on considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \cos(\pi n)$.

a) Prouver que pour tout entier naturel n, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

b) Calculer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

c) Si on pose $n = 2k$, calculer u_n ; en déduire alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

d) Si on pose $n = 2k+1$, calculer u_n ; en déduire alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

e) D'après les résultats des questions précédentes, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ qui est bornée converge-t-elle ? Justifier votre réponse.

Intégrales et Primitives

Exercice 1 Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 \sin x, \qquad f(x) = \frac{x^2+1}{x^3+3x-5}, \qquad f(x) = e^{2x}\cos x, \qquad f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_a^b x^2 e^{2x}\mathrm{d}x, \qquad \int_a^b (\ln x)^n \frac{\mathrm{d}x}{x}, \qquad \int_a^b x^2 \ln x \mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 (\ln x)^2 \mathrm{d}x, \qquad \int_1^3 \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \mathrm{d}x$$

Exercice 4 Pour x positif, on pose $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{t\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$ (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

a) Déterminer trois constantes réelles a, b, c telles qu'on ait pour tout t non nul :

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}$$

b) Montrer que $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 - f(x)$ pour tout x strictement positif.

Exercice 5 Le but de cet exercice est d'encadrer l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}\mathrm{d}x$.

a) Prouver que pour tout $x \in [0,1]$,

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

b) En déduire un encadrement de e^{-x^2} pour tout $x \in [0,1]$.

c) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$

$$1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1 - x + \frac{x^4}{2(1+x)}$$

d) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$,

$$\frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

e) Déduire des questions précédentes que

$$\frac{1}{2} \leq K \leq \frac{5}{24} + \frac{\ln 2}{2}$$

Exercice 6 Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout réel positif x

$$e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

Exercice 7 On considère l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\mathrm{d}t$$

a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$,

$$\frac{t^2}{2} \leq \frac{t^2}{1+t} \leq t^2$$

b) En déduire un encadrement de I.

c) Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout $t \in [0,1]$,

$$\frac{t^2}{1+t} = at + b + \frac{c}{1+t}$$

d) En déduire une primitive de la fonction

$$f : t \mapsto \frac{t^2}{1+t}$$

e) Calculer I à l'aide des questions précédentes, puis en déduire un encadrement de $\ln 2$.

Exercice 8 On désigne par n un entier relatif et par x un nombre réel. On suppose que n est un entier différent de (-1) et que $x > 1$.

a) Au moyen d'une intégration par parties, calculer l'intégrale

$$I_n(x) = \int_1^x t^n \ln t \mathrm{d}t$$

b) En déduire le calcul de l'intégrale

$$J_n(x) = \int_1^x t^n (\ln t)^2 \mathrm{d}t$$